Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом промежутке вещественной оси, кусочно-непрерывная $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и имеет при любом вещественном x односторонние производные.

Тогда, по аналогии с определением тригонометрического ряда Фурье, заменив операцию суммирования интегрированием, ей можно поставить в соответствие функцию $\mathrm{Y}(x)$, являющуюся несобственным интегралом, зависящим от параметра $x \in (0, +\infty)$, вида

$$Y(x) = \int_{0}^{+\infty} \big(a(u)\cos xu + b(u)\sin xu\big)du\,, \tag{1}$$

где $a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt$ и $b(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt$.

Имеет место

Теорема 1. В точке x будет верно равенство

$$Y(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,.$$

Функции $a(u)$ и $b(u)$ могут рассматриваться (по аналогии с последовательностями $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, которые являются дискретным спектром периодической функции) как *непрерывные* спектры *непериодической* функции $f(x)$.

А сама функция $Y(x)$, называемая *интегралом Фурье*, может интерпретироваться как гармоническое разложение (т.е. как спектр) для *непериодической* функции.

Связь ряда Фурье и интеграла Фурье может быть продемонстрирована более наглядно и естественно при помощи следующего предельного перехода в стандартной римановской интегральной сумме.

Как мы видели ранее, каждой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-A, A]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие, определенную на $\mathbf{R}$, $2A$-периодическую функцию $\Phi(x)$ вида

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right) , \tag{2}$$

называемую *суммой ряда Фурье*, где коэффициенты a_k и b_k определялись по формулам

$$a_0 = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u)\, du , \quad a_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u) \cos \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad \text{и}$$

$$b_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u) \sin \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N} .$$

Тогда $\forall x \in (-A, A) \quad \Phi(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Сделаем следующие преобразования, исходя из формулы (1).

$$J(x,A)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{A}+b_k\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi kt}{A}dt\right)\cos\frac{\pi kx}{A}+\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\sin\frac{\pi kt}{A}dt\right)\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\left(\cos\frac{\pi kt}{A}\cdot\cos\frac{\pi kx}{A}+\sin\frac{\pi kt}{A}\cdot\sin\frac{\pi kx}{A}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi k}{A}(x-t)dt\,. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\cos\omega(t-x)dt$, определенную для $\omega\in(0,A)$. Построим для нее *римановскую интегральную сумму* вида $\sigma_N=\sum\limits_{k=1}^{N}\Delta_k\Psi(\omega_k)$, в которой $\Delta_k=\frac{A}{N}$ − мелкость разбиения промежутка $(0,A]$, а $\omega_k=\frac{\pi k}{A}$ принадлежит k-му участку разбиения.

Здесь у нас возникает три предельных перехода: суммирование ряда Фурье при $N \to \infty$, $A \to +\infty$. и, наконец, $-A \to -\infty$. Предположим, что они обеспечивают стремление мелкости рпазбиения к нулю. Тогда, с учетом $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A} |\, f(t)\,|\, dt = 0$, мы получаем

$$\lim_{A\to+\infty} J(x,A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \Delta_k \Psi(\omega_k) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \big(a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x\big) d\omega = Y(x)\,, \qquad (4)$$

где $a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$ и $b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$.

В этих рассуждениях важно учитывать, что в этих формулах были объединены в один сразу три предельных перехода:

- переход от интегральной суммы к определенному интегралу за счет устремления мелкости разбиения к нулю;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $+\infty$;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $-\infty$.

При этом совместное выполнение предельных переходов первого со вторым, равно как первого с третьим вполне корректно. Но совместное выполнение второго и третьего перехода явно нарушает определение существования несобственного интеграла с несколькими особыми точками (в нем требуется существование интеграла во *всех* особых точках при *независимых* предельных переходах к каждой из них). Этот вопрос мы рассмотрим позднее.

Для иллюстрации этой интерпретации рассмотрим

Пример 6. Представить интегралом Фурье для $\tau = 10$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } |\, x \,| \le \tau, \\ 0, \text{ при } |\, x \,| > \tau. \end{cases}.$$

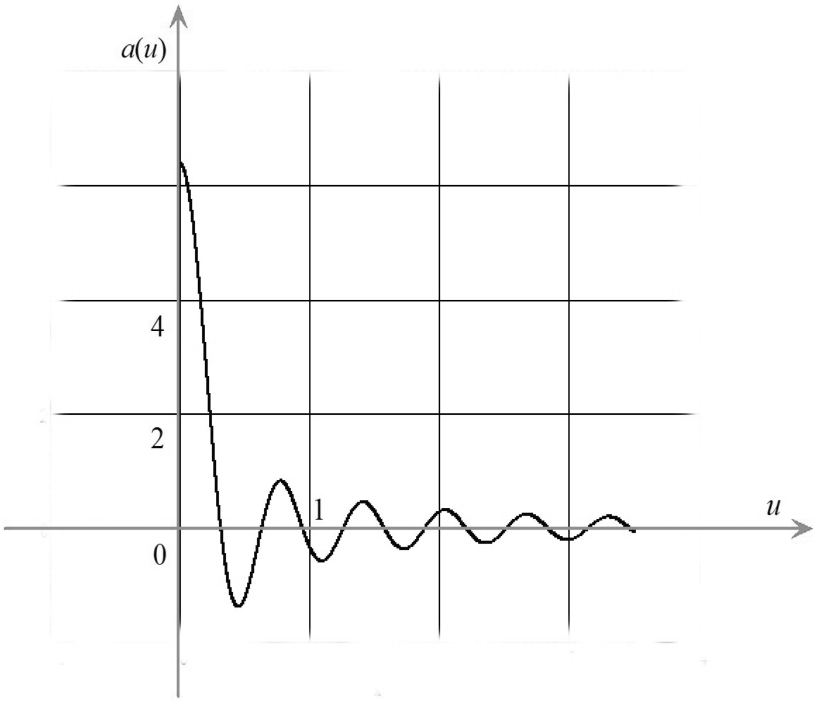
Решение: Пусть фиксированное $\tau > 0$. Поскольку функция $f(x)$ четная, то очевидно, что $b(u) \equiv 0$. Для $a(u)$ имеем

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\tau}\cos ut\,dt = \frac{2\sin\tau u}{u} \quad .$$

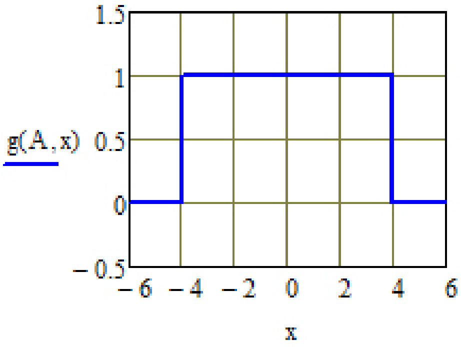
Следовательно, искомое представление будет

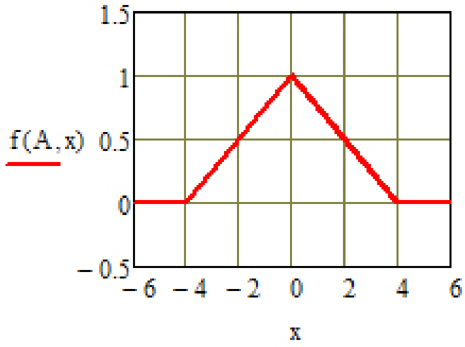
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\tau u\cdot\cos xu}{u}\,du\,.$$

График непрерывной спектральной функции $a(u)$ для $\tau = 10$ имеет вид.

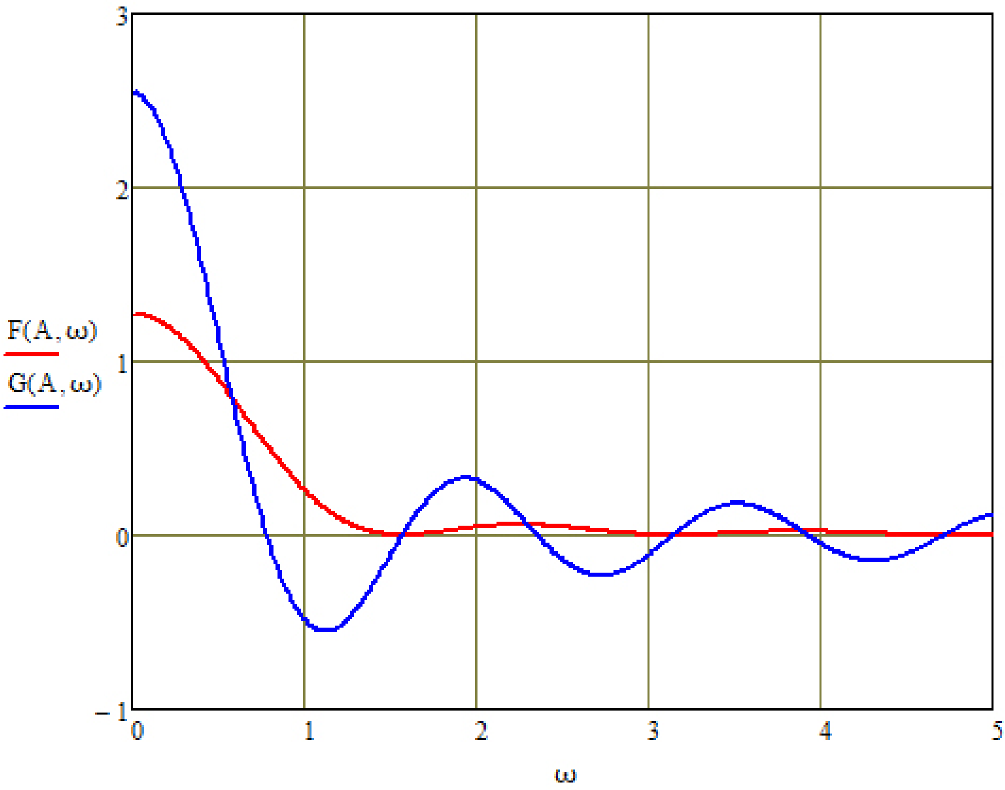


$$g(A,x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad f(A,x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{A} & \text{if } |x| \le A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





$$G(A,\omega) := \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(A \cdot \omega)}{\omega} \qquad F(A,\omega) := \frac{2}{\pi A} \cdot \frac{1 - \cos(A \cdot \omega)}{\omega^2}$$



Рассмотрим следующую задачу Коши для гармонического уравнения

$$x''+\omega_0^2 x = A\cos\omega t$$

с начальными условиями: $x(0) = x'(0) = 0$, где $\omega_0 > 0, \omega > 0, A \neq 0$ − некоторые константы. В теории колебаний подобная задача возникает при исследовании внешнего гармонического воздействия с частотой ω и амплитудой A на линейную систему, частота собственных колебаний которой равна ω_0.

Заметим, что для этой задачи характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ имеет корни $\pm i\,\omega_0$, а правая часть есть сумма квазимногочленов нулевого порядка $\frac{1}{2}e^{i\varpi t} + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-i\varpi t}$.

Известно, что решением данной задачи Коши при $\omega \neq \omega_0$ будет функция нерезонансного вида $x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)$.

В то время как в резонансном случае, при $\omega = \omega_0$, решение имеет вид $x(t) = \frac{A}{2\omega_0^2}\,t\sin\omega_0 t$.

Отсюда следует, что в нерезонансном случае амплитуда колебаний решения постоянна, а при резонансе пропорциональна независимой переменной *t*.

Наконец, становится очевидным, что при воздействии с непрерывным спектром, найдется гармоника, имеющая резонансную частоту.

Сравнение свойств ряда Фурье и интеграла Фурье

Приведем сопоставление определений и свойств ряда и интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Дано: функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-A,A]$, $A>0$.	Дано: функция $f(x)$ определена, абсолютно интегрируема $\forall x \in (-\infty,+\infty)$, кусочно-непрерывна на любом отрезке вещественной оси и имеет односторонние производные для каждого вещественного x.
Ей сопоставляется функция $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{A} + b_k \sin\frac{\pi k x}{A}\right),$	Ей сопоставляется функция $Y(x) = \int\limits_0^{+\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x + b(u)\sin\omega x\big)d\omega$
Где $a_0 = \frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\,dt,$ $a_k = \frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\cos\frac{\pi k t}{A}dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$ $b_k = \frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\sin\frac{\pi k t}{A}dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$	Где $a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$ $b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$
Справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} \quad \forall x_0 \in (-A,A)$	Справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}Y(x) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} \quad \forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$
Функция $\Phi(x)$ определена на $x\in(-\infty,+\infty)$, $2A$-*периодическая*	Функция $\mathrm{Y}(x)$, определена на $x\in(-\infty,+\infty)$, вообще говоря, *непериодическая*
Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, $k\in\mathbf{N}$, называются *дискретным спектром* $f(x)$	Функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$, $\omega\in(0,+\infty)$, называются *непрерывным спектром* функции $f(x)$.