

Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом промежутке вещественной оси, кусочно-непрерывная $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и имеет при любом вещественном x односторонние производные.

Тогда, по аналогии с определением тригонометрического ряда Фурье, заменив операцию суммирования интегрированием, ей можно поставить в соответствие функцию $Y(x)$, являющуюся несобственным интегралом, зависящим от параметра $x \in (0, +\infty)$, вида

$$Y(x) = \int_0^{+\infty} (a(u) \cos xu + b(u) \sin xu) du, \quad (1)$$

где $a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut dt$ и $b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut dt$.

Имеет место

Теорема 1. В точке x будет верно равенство

$$Y(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Функции $a(u)$ и $b(u)$ могут рассматриваться (по аналогии с последовательностями $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, которые являются дискретным спектром периодической функции) как *непрерывные спектры неперiodической функции $f(x)$* .

А сама функция $Y(x)$, называемая *интегралом Фурье*, может интерпретироваться как гармоническое разложение (т.е. как спектр) для *неперiodической функции*.

Связь ряда Фурье и интеграла Фурье может быть продемонстрирована более наглядно и естественно при помощи следующего предельного перехода в стандартной римановской интегральной сумме.

Как мы видели ранее, каждой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-A, A]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие, определенную на \mathbf{R} , $2A$ -периодическую функцию $\Phi(x)$ вида

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right), \quad (2)$$

называемую *суммой ряда Фурье*, где коэффициенты a_k и b_k определялись по формулам

$$a_0 = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(u) du, \quad a_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(u) \cos \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \text{и}$$

$$b_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(u) \sin \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Тогда $\forall x \in (-A, A) \quad \Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Сделаем следующие преобразования, исходя из формулы (1).

$$\begin{aligned}
 J(x, A) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right) = \\
 &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) \cos \frac{\pi k t}{A} dt \right) \cos \frac{\pi k x}{A} + \left(\frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) \sin \frac{\pi k t}{A} dt \right) \sin \frac{\pi k x}{A} \right) = \\
 &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) \left(\cos \frac{\pi k t}{A} \cdot \cos \frac{\pi k x}{A} + \sin \frac{\pi k t}{A} \cdot \sin \frac{\pi k x}{A} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{A} \int_{-A}^A f(t) \cos \frac{\pi k}{A} (x-t) dt. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A f(t) \cos \omega(t-x) dt$, определенную для $\omega \in (0, A)$. По-

строим для нее *римановскую интегральную сумму* вида $\sigma_N = \sum_{k=1}^N \Delta_k \Psi(\omega_k)$, в которой

$\Delta_k = \frac{A}{N}$ – мелкость разбиения промежутка $(0, A]$, а $\omega_k = \frac{\pi k}{A}$ принадлежит k -му участку разбиения.

Здесь у нас возникает три предельных перехода: суммирование ряда Фурье при $N \rightarrow \infty$, $A \rightarrow +\infty$. и, наконец, $-A \rightarrow -\infty$. Предположим, что они обеспечивают стремление мелкости разбиения к нулю. Тогда, с учетом $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A |f(t)| dt = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} J(x, A) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \Delta_k \Psi(\omega_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega = Y(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$ и $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$.

В этих рассуждениях важно учитывать, что в этих формулах были объединены в один сразу три предельных перехода:

- переход от интегральной суммы к определенному интегралу за счет устремления мелкости разбиения к нулю;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $+\infty$;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $-\infty$.

При этом совместное выполнение предельных переходов первого со вторым, равно как первого с третьим вполне корректно. Но совместное выполнение второго и третьего перехода явно нарушает определение существования несобственного интеграла с несколькими особыми точками (в нем требуется существование интеграла во *всех* особых точках при *независимых* предельных переходах к каждой из них). Этот вопрос мы рассмотрим позднее.

Для иллюстрации этой интерпретации рассмотрим

Пример 6. Представить интегралом Фурье для $\tau = 10$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq \tau, \\ 0, & \text{при } |x| > \tau. \end{cases}$$

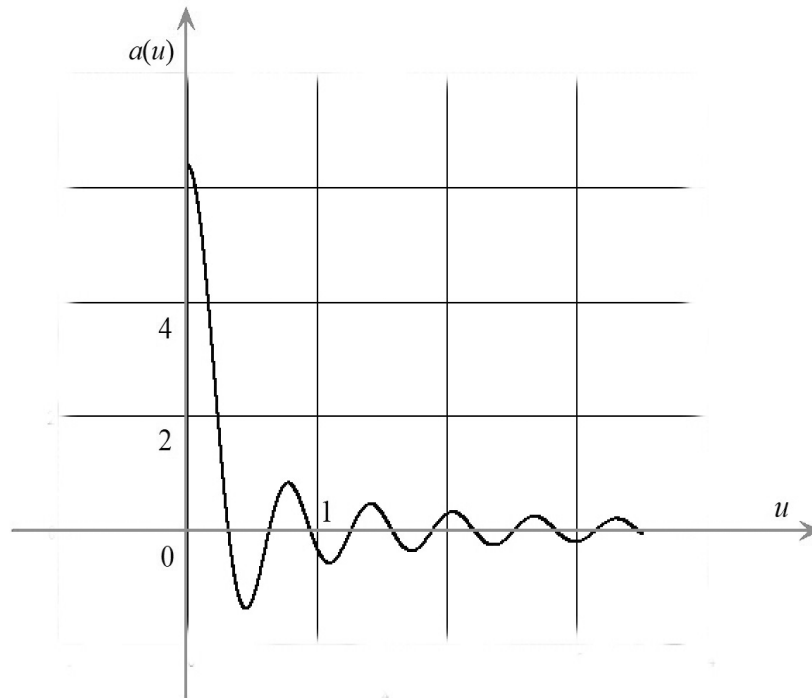
Решение: Пусть фиксированное $\tau > 0$. Поскольку функция $f(x)$ четная, то очевидно, что $b(u) \equiv 0$. Для $a(u)$ имеем

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u) \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} \cos ut \, dt = \frac{2 \sin \tau u}{u} .$$

Следовательно, искомое представление будет

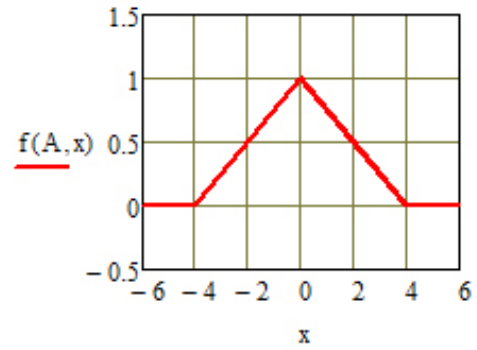
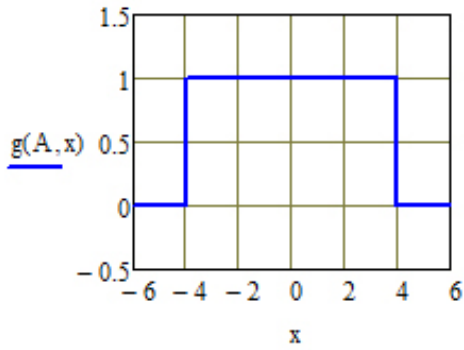
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau u \cdot \cos xu}{u} \, du .$$

График непрерывной спектральной функции $a(u)$ для $\tau = 10$ имеет вид.



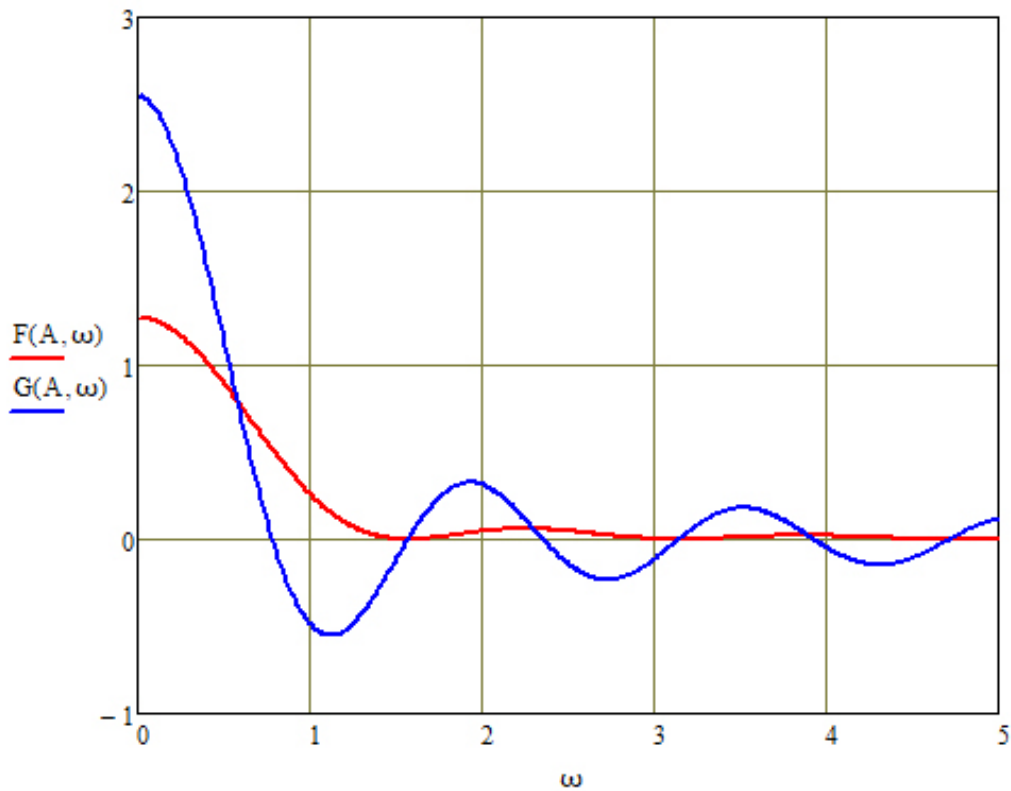
$$g(A, x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(A, x) := \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{A} & \text{if } |x| \leq A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$G(A, \omega) := \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(A \cdot \omega)}{\omega}$$

$$F(A, \omega) := \frac{2}{\pi A} \cdot \frac{1 - \cos(A \cdot \omega)}{\omega^2}$$



Рассмотрим следующую задачу Коши для гармонического уравнения

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$

с начальными условиями: $x(0) = x'(0) = 0$, где $\omega_0 > 0, \omega > 0, A \neq 0$ – некоторые константы. В теории колебаний подобная задача возникает при исследовании внешнего гармонического воздействия с частотой ω и амплитудой A на линейную систему, частота собственных колебаний которой равна ω_0 .

Заметим, что для этой задачи характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ имеет корни $\pm i \omega_0$, а правая часть есть сумма квазимногочленов нулевого порядка $\frac{1}{2} e^{i\omega t} + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-i\omega t}$.

Известно, что решением данной задачи Коши при $\omega \neq \omega_0$ будет функция нерезонансного вида

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

В то время как в резонансном случае, при $\omega = \omega_0$, решение имеет вид $x(t) = \frac{A}{2\omega_0^2} t \sin \omega_0 t$.

Отсюда следует, что в нерезонансном случае амплитуда колебаний решения постоянна, а при резонансе пропорциональна независимой переменной t .

Наконец, становится очевидным, что при воздействии с непрерывным спектром, найдется гармоника, имеющая резонансную частоту.

Сравнение свойств ряда Фурье и интеграла Фурье

Приведем сопоставление определений и свойств ряда и интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

<p>Дано: функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-A, A]$, $A > 0$.</p>	<p>Дано: функция $f(x)$ определена, абсолютно интегрируема $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, кусочно-непрерывна на любом отрезке вещественной оси и имеет односторонние производные для каждого вещественного x.</p>
<p>Ей сопоставляется функция</p> $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right),$	<p>Ей сопоставляется функция</p> $Y(x) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega$
<p>Где</p> $a_0 = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) dt,$ $a_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) \cos \frac{\pi k t}{A} dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$ $b_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) \sin \frac{\pi k t}{A} dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$	<p>Где</p> $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$ $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$
<p>Справедливо равенство</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \quad \forall x_0 \in (-A, A)$	<p>Справедливо равенство</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} Y(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \quad \forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$
<p>Функция $\Phi(x)$ определена на $x \in (-\infty, +\infty)$, $2A$-периодическая</p>	<p>Функция $Y(x)$, определена на $x \in (-\infty, +\infty)$, вообще говоря, непериодическая</p>
<p>Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, называются <i>дискретным спектром</i> $f(x)$</p>	<p>Функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$, $\omega \in (0, +\infty)$, называются <i>непрерывным спектром</i> функции $f(x)$.</p>