

**НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА**

При решении задач предполагается, что могут быть использованы, как известные из теоретической части курса "Гармонического анализа", следующие (табличные) интегралы:

1°. *Интеграл Дирихле:*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

2°. *Интегралы Лапласа:*
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

3°. *Интеграл Эйлера–Пуассона:*
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

В ряде задач может оказаться полезной формула Фруллани:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и для каждого $A > 0$ интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится,

то $\forall a > 0$ и $\forall b > 0$ верно равенство $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

Рассмотрим для иллюстрации следующие задачи.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$.

Решение. Выполним замену переменной $x^3 = u$ и используем значение интеграла Дирихле при $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} dx^3 = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Решение. Заметим, что из сходимости интеграла Эйлера-Пуассона следует, что

$$0 < \int_A^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \leq \frac{1}{A} \int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2A}$$

при любом фиксированном $A > 0$.

Поэтому можно применить формулу Фруллани. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\sqrt{\alpha} x)^2} - e^{-(\sqrt{\beta} x)^2}}{x} dx = e^{-0^2} \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

Пример 2а. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x + \delta) - \sin(\beta x + \delta)}{x} dx$, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Решение. Заметим, что из сходимости интеграла Дирихле следует, что интеграл

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x + \delta)}{x} dx$$

сходится при любом фиксированном $A > 0$.

Поэтому применение формулы Фруллани дает

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x + \delta) - \sin(\beta x + \delta)}{x} dx = \sin \delta \cdot \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

Пример 3. Вычислить $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \cos x dx$, $\alpha > 0$.

Решение. Функция $\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}$ монотонно убывает на $x \in (0, +\infty)$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную. Поэтому $\Phi(\alpha)$ сходится *поточечно* по признаку Дирихле.

Интеграл от $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \cos x \right) = e^{-\alpha x} \cos x$ сходится *равномерно*, поэтому мы можем использовать равенство (этот интеграл берущийся)

$$\Phi'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Откуда получаем

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) + C.$$

А, поскольку $\Phi(0) = 0$, то $C = 0$ и окончательно $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2)$.

Пример 4. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$.

Решение. Рассмотрим параметрический интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx, \quad \alpha > 0,$$

который совпадает с исходным при $\alpha = 1$.

Заметим, что $\Phi(\alpha)$ сходится равномерно, поскольку его можно представить в виде

$$\int_0^1 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx,$$

где первый интеграл – определенный, взятый от непрерывной функции двух переменных,

а для второго (несобственного) – справедлива оценка

$$\int_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx \leq 2\alpha \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Далее, $\Phi'(\alpha)$ также сходится *равномерно*, поскольку справедлива оценка

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} = \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Наконец, используя интеграл Дирихле, находим

$$\Phi''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \alpha > 0.$$

Теперь, дважды проинтегрировав по α функцию $\Phi''(\alpha)$, получим, что

$$\Phi(\alpha) = \frac{\pi}{4} \alpha^2 + \frac{C\pi}{2} \alpha + D.$$

Поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi(\alpha) = 0$, то по непрерывности можно положить $\Phi(0) = 0$.

Тогда $\Phi(\alpha) = \frac{\pi}{4} \alpha^2$ и значение исходного интеграла есть $\Phi(1) = \frac{\pi}{4}$.

В примере 4 естественно может возникнуть вопрос: а не проще ли было параметризацию интеграла сделать по формуле $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin \alpha x}{x^3} dx$, $\alpha > 0$? Какое Ваше мнение на этот счет?