СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим *определенный* (римановский) интеграл от функции двух переменных $f(x,\alpha)$, определенной на замкнутом прямоугольнике $K:\{\, a \le x \le b;\, c \le \alpha \le d \,\}$, который берется по переменной x в пределах от a до b.

Понятно, что значение этого интеграла будет, вообще говоря, зависеть от значения α, при котором он берется.

Поскольку римановский интеграл по своему определению есть *предел* так называемой *римановской суммы* (и известно, что предел, если существует), то он *единственный*. Поэтому зависимость значения от величины α является *функциональной*.

Проще говоря, в рассматриваемом случае данный интеграл есть *функция* переменной α:

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx \ . \qquad (1)$$

Здесь возникает естественный вопрос: как свойства функции $\Phi(\alpha)$ зависят от свойств функции $f(x,\alpha)$?

Или, более конкретно,

> можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией $\Phi(\alpha)$ (скажем, вычисления предела, дифференцирования или интегрирования по α), "переставлять" эту операцию и интегрирование в (1)?

Ответ: в общем случае этого делать нельзя.

Поясним это следующим

примером 1. *Пусть* $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}dx\,,\quad \alpha>0\,,$

требуется найти $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Phi(\alpha)\,.$

Решение: Данный интеграл "берущийся", и из $\Phi(\alpha)=\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^1$ получаем, что $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Phi(\alpha)=\frac{\pi}{2}$ С другой стороны, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}dx=0\,.$

Возможность изменения "порядка действий" для операций предельного перехода и вычисления римановского интеграла определяет следующая теорема 1:

Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на $K:\{\, a \le x \le b; c \le \alpha \le d \,\}$, то $\Phi(\alpha)$ непрерывна, а, значит и интегрируема на $[c,d]$.

Следует принять во внимание, что

- непрерывность функции $f(x,\alpha)$, как равенства значения и предела в точке, предполагает здесь *двойной* (*кратный*) предел по вектору $\left\| \begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix} \right\|$. Это является, с одной стороны, довольно жестким требованием, что и показывает пример 1;
- с другой стороны, выполнение этого жесткого условия позволяет в некоторых случаях находить значения "не берущихся" интегралов.

Пример 2. *Найти* $I = \lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение: Здесь не получится начать с формулы Ньютона-Лейбница, поскольку соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции.

Однако в силу *непрерывности* подынтегральной функции *двух* переменных α и x, будут справедливы равенства

$$I = \lim_{\alpha \to 0} \int\limits_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^9 \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Bigg|_1^9 = 4.$$

Пример 3. *Найти* $I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx$, *где* $b > a > 0$.

Решение: 1) Заметим, что $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^u du$. Тогда

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^u \sin \ln x \, du \ . \qquad (2)$$

Если доопределить нулями в точках с $u \in [a, b]$ и $x = 0$ подынтегральную функцию внутреннего интеграла, то мы сделаем ее непрерывной (*почему*?) на множестве $K : \{ a \le u \le b; 0 \le x \le 1 \}$.

Теперь, (по теореме 1) изменив порядок интегрирования, получим, делая подстановку $x = e^t$ и $dx = e^t dt$,

$$I = -\int\limits_a^b du \int\limits_{-\infty}^0 e^{(u+1)t} \sin t \, dt \ .$$

Обозначим через J внутренний интеграл. Для него (*вспомните материал первого курса*) двукратным последовательным интегрированием "по частям" получается уравнение вида: $J = -1 - (u+1)^2 J$, откуда $J = -\dfrac{1}{1+(u+1)^2}$.

Возвращаясь к вычислению интеграла I, из (2) окончательно получаем

$$I = \int\limits_a^b \frac{du}{1+(u+1)^2} = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1) .$$

Условия, определяющие возможность перестановки в римановских интегралах операций дифференцирования и интегрирования, дает теорема 2:

> Если в интеграле $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ функции $f(x,\alpha), \lambda(\alpha), \mu(\alpha)$ *непрерывно дифференцируемы* по α на $K:\{\, a\le x\le b; c\le\alpha\le d \,\}$, то справедливо равенство
>
> $$\Phi'(\alpha)=f(\mu(\alpha),\alpha)\,\mu'(\alpha)-f(\lambda(\alpha),\alpha)\,\lambda'(\alpha)+\int\limits_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx\,. \qquad (3)$$

Формула (3) может оказаться полезной при нахождении интегралов.

Пример 4. *Применив формулу дифференцирования по параметру* α *в интеграле* $I(\alpha)=\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$, *где* $b>0$, *найти интеграл* $J(\alpha)=\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

Решение: Поскольку в данном случае применима теорема 2, то мы имеем

$$I'_\alpha(\alpha)=-2\alpha\,J(\alpha). \tag{4}$$

С другой стороны, по правилам интегрирования

$$I(\alpha)=\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha},$$

а это дает

$$I'_\alpha(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2}{\alpha^2}}\cdot\frac{b}{\alpha^2}.$$

И, окончательно, из равенства (4) находим, что

$$\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}=J(\alpha)=-\frac{1}{2\alpha}I'_\alpha(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha^2}\cdot\frac{b}{\alpha^2+b^2}.$$