ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ.

Ниже мы будем использовать следующие определения и теоретические факты.

В любом конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны (по сходимости). В бесконечномерных пространствах это может не выполняться.

Линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \|_{CL[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} | f(x) |$ будем обозначать как $CL[a,b]$ или $C[a,b]$.

Линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \|_{CL_1[a,b]} = \int\limits_a^b | f(x) | dx$ будем обозначать как $CL_1[a,b]$.

Линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \|_{CL_2[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx}$ будем обозначать как $CL_2[a,b]$.

При этом имеют место полезные оценки:

$$\| f \|_{CL_1[a,b]} \le (b-a) \| f \|_{CL[a,b]} \quad \text{и} \quad \| f \|_{CL_2[a,b]} \le \sqrt{b-a}\, \| f \|_{CL[a,b]}.$$

Можно показать, что из сходимости по норме $\| f \|_{CL_2[a,b]}$ (как иногда говорят, *сходимости в среднем квадратичном*) не следует сходимость по норме $\| f \|_{CL[a,b]}$ (*равномерная* сходимость), а из сходимости по норме $\| f \|_{CL_1[a,b]}$ (сходимости *в среднем*) не следует сходимость в среднем квадратичном.

Определение. Счетная система элементов $\{ g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots \}$ в линейном нормированном пространстве L называется *полной*, если

$$\forall f(x) \in L \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad \to \quad \exists k \in \mathbf{N} \ \ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R} : \qquad \left\| f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \right\| < \varepsilon \ .$$

Заметим, что *отрицание* этого определения имеет вид:

$$\exists f_0(x) \in L \ \ \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \to \quad \forall k \in \mathbf{N} \ \ \forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R} : \qquad \left\| f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \right\| \ge \varepsilon_0 \ .$$

Справедливы *теоремы Вейерштрасса*:

1°. Система функций $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ полна в $C[a,b]$ на любом отрезке $[a,b]$.

2°. Система функций $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, , \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ полна в пространстве непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций, для которых $f(-\pi) = f(\pi)$.

Полные системы можно использовать для аппроксимаций функций подходящего класса конечными многочленами с любой наперед заданной точностью.

Рассмотрим некоторые примеры *исследования систем функций на полноту* (то есть, доказательства факта наличия или отсутствия этого свойства).

Пример 01. Система нечетных полиномов Лежандра, дополненная функцией равной тождественно 1, полна в пространстве непрерывных функций на промежутке $[0,1]$.

Решение: Любую непрерывную на $[0,1]$ функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = f(0) + \varphi(x)$, где $\varphi(0) = 0$.

Функцию $\varphi(x)$, а значит и функцию $f(x) - f(0)$ можно продолжить нечетным образом на $[-1,1]$. Значит $\exists \alpha_k$ такие, что

$$\left\| f(x) - f(0)\cdot 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_{2k-1}(x) \right\| < \varepsilon \text{ на } [-1,1].,$$

откуда следует полнота системы $\{1, x, x^3, \ldots, x^{2k-1}, \ldots\}$ на $[0,1]$.

Пример 02. Система синусов нечетных кратных дуг неполна в пространстве непрерывных функций на промежутке [0,1].

Решение: Следует из оценки : $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|1-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\sin(2j-1)x\right|\geq 1$, поскольку существует непрерывная $f(x)=1\quad\forall x\in[0,1]$, а любая функция вида $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\sin(2j-1)x$ равна 0 при $x=0$.

Задача 03. Показать, что система функций $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$
1) не полна в $C[-1,2]$,
2) полна в $C[1,2]$.

Решение. 1) Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+2}$.

Во множестве $C[-1,2]$ *имеется* функция $f_0(x) \equiv 1$, для которой *существует* точка $x_0 = 0$ такая, что

$$\max_{x\in[-1,2]} \left| f_0(x) - P_n(x) \right| \ge \left| f_0(x_0) - P_n(x_0) \right| = \left| 1 - 0 \right| = 1 = \varepsilon_0$$

при *любом* $P_n(x)$.

Тогда из *отрицания* определения полноты системы функций следует, что система функций $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$ не полна в $C[-1,2]$.

2) Для произвольной функции $f(x) \in C[1,2]$ оценим величину

$$\max_{x\in[1,2]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+2} \right| = \max_{x\in[1,2]} x^2 \cdot \left| \frac{f(x)}{x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k} \right| =$$

при замене $t = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t}$

$$= \max_{t\in[1,4]} t \cdot \left| \frac{f(\sqrt{t})}{t} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

поскольку $\max\limits_{t\in[1,4]} t \le 4$ и $\max\limits_{t\in[1,4]} \left| \frac{f(\sqrt{t})}{t} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \right| < \frac{\varepsilon}{4}$ по теореме Вейерштрасса

в силу непрерывности на $[1,4]$ функции $\frac{f(\sqrt{t})}{t}$.

Следовательно, по определению полноты системы функций, система $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$ полна в $C[1,2]$.

Задача 04. Показать, что система функций $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$
1) не полна в $C[-4,\pi]$,
2) полна в $C[\pi,4]$.

Решение. 1) Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1}$.

Во множестве $C[-4,\pi]$ *имеется* функция $f_0(x) \equiv 1$, для которой *существует* точка $x_0 = 0 \in C[-4,\pi]$ такая, что

$$\max_{x\in[-4,\pi]} \left| f_0(x) - P_n(x) \right| \geq \left| f_0(x_0) - P_n(x_0) \right| = \left| 1 - 0 \right| = 1 = \varepsilon_0$$

при *любом* $P_n(x)$.

Тогда из *отрицания* определения полноты системы функций следует, что система функций $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ не полна в $C[-4,\pi]$.

2) Произвольную функцию $f(x) \in C[\pi,4]$ непрерывно продолжим нечетным образом
на $[-4,4]$. Полученную функцию обозначим $g(x) \in C[-4,4]$. Для нее верно равенство $g(x) = -g(-x) \quad \forall x \in [-4,4]$.

Для $g(x)$ справедлива теорема Вейерштрасса:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \alpha_k x^k : \quad \forall x \in [-4,4] \quad \mapsto \quad \left| g(x) - R_n(x) \right| < \varepsilon .$$

Но при этом будет также верно и $\forall x \in [-4,4] \quad \mapsto \quad \left| g(-x) - R_n(-x) \right| < \varepsilon$.

Заметим также, что $P_n(x) = \dfrac{R_n(x) - R_n(-x)}{2} \quad \forall x \in [-4,4]$ и что из нечетно-
сти
функции $g(x)$ следует равенство $g(x) = \dfrac{g(x) - g(-x)}{2} \quad \forall x \in [-4,4]$.

Оценим теперь

$$\left| g(x) - P_n(x) \right| = \left| \frac{g(x) - g(-x)}{2} - \frac{R_n(x) - R_n(-x)}{2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left| g(x) - R_n(x) \right| + \frac{1}{2}\left| g(-x) - R_n(-x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in [-4,4] .$$

Это означает, что система функций $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ полна в $C[-4,4]$, а, значит, и в $C[\pi,4]$. Ибо, по построению, $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [\pi,4]$.

Задача 05. Выяснить, будет ли полной система функций

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, , \ldots\}$$

1) на $C[-2,4]$,

2) на $C[2,4]$.

Решение. 1) Напомним: система $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, , \ldots\}$ *является полной* на $[a,b]$, если $\forall f(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_n \cos kx$ такой, что

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b].$$

Отрицание этого определения таково:

система функций $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, , \ldots\}$ *не является полной* на $[a,b]$, если $\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \exists x_0 \in [a,b]$ такие, что $\left| f(x_0) - P_n(x_0) \right| \geq \varepsilon_0 \qquad \forall P_n(x).$

2°. Предположим противное: данная система полна на $[-2,4]$.

Тогда, для не равной тождественно 0, *нечетной* непрерывной функции $f(x)$ найдется точка $x_0 \in (0,2)$, такая что

$$f(x_0) = A > 0 \quad \text{и} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \left| f_0(x_0) - P_n(x_0) \right| < \varepsilon , \qquad \text{где } P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos kx .$$

Заметим, что $P_n(x)$ есть *четная* функция по построению.

При этом $\exists x' = -x_0 \in (-2,0)$, где в силу нечетности $f(x)$ и четности $P_n(x)$, будет справедлива оценка:

$$\left| f_0(x') - P_n(x') \right| = \left| f_0(x_0) + P_n(x_0) \right| > 2A - \varepsilon ,$$

из которой следует неполнота системы $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos kx, \dots\}$ на $[-2,2]$, а, значит, и на $[-2,4]$. Но, это противоречит исходному предположению.

Наконец, если $f(x) < 0 \;\; \forall x \in (0,2)$, то проводим аналогичные рассуждения для непрерывной нечетной функции $g(x) = -f(x)$.

3°. Рассмотрим случай $C[2,4]$.

Пусть $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$ частичные суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ $x \in [-l, l]$, а $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$ – соответствующие им суммы Фейера.

Доопределим $f(x)$ на $[-4,4]$ четным образом, получим четную, непрерывную функцию $g(x)$ такую, что $g(x) \equiv f(x) \quad \forall x \in [2,4]$. Частичные суммы ряда Фурье (равно как и суммы Фейера) для функции $g(x)$ будут некоторыми линейными комбинациями функций из системы $\{1; \cos x; \cos 2x; \ldots \cos nx; \ldots\}$.

Воспользуемся теперь теоремой Фейера о том, что, если функция $g(x)$ непрерывна на $[-l, l]$ и $g(-l) = g(l)$, то функциональная последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится равномерно к сумме ряда Фурье для функции $g(x)$. Из этой теоремы следует, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0$ такое, что $\forall m \geq N_0 \quad \sup\limits_{x \in R} \left| g(x) - \sigma_m \right| < \varepsilon$, но тогда будет верно и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0$ такое, что $\forall m \geq N_0 \quad \sup\limits_{x \in [2,4]} \left| f(x) - \sigma_m \right| < \varepsilon$. Что доказывает полноту системы функций $\{1; \cos x; \cos 2x; \ldots \cos nx; \ldots\}$ на $C[2,4]$.