Метрические множества и нормированные линейные пространства

Напомним вначале определения *сходимости* и *фундаментальности* для числовых последовательностей.

1) Число A является *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$ (символически это записывается как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$), если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad \to \quad |x_n - A| < \varepsilon .$$

2) Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \text{ и } \forall m \geq N_\varepsilon \quad \to \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$
или, что, то же самое,
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \text{ и } \forall p \in \mathbf{N} \quad \to \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Имеет место **теорема**:

Для того, чтобы числовая последовательность имела предел (*была сходящейся*)*, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Определение 01 Множество $X := \{x, y, z, \ldots\}$ называется *метрическим*, если *каждой* упорядоченной паре его элементов x и y поставлено в соответствие *единственное* неотрицательное число $\rho(x, y)$ такое, что $\forall x, y, z \in X$ выполнены аксиомы:

1) $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (*неравенство треугольника*)

В метрическом множестве можно пользоваться определениями *сходящейся* и *фундаментальной* последовательности.

Из сходимости всегда следует фундаментальность, но, не наоборот!

Множество называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого множества.

Определение 02 *Линейное пространство* $X := \{x, y, z, \ldots\}$ называется *нормированным*, если *каждому* его элементу x поставлено в соответствие *единственное* неотрицательное число $\| x \|$ такое, что $\forall x, y \in X$ и $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ выполнены аксиомы:

1) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$, (*однородность нормы*),

2) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$, (*неравенство треугольника*),

3) $\| x \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = o$.

В нормированном линейном пространстве в качестве метрики можно принять

$$\rho(x, y) = \| x - y \| .$$

Полное нормированное пространство принято называть *банаховым* пространством.

Пример 02. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ суть фундаментальные последовательности в некотором метрическом множестве *X*. Покажите, что последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ сходится.

Решение: 1) По неравенству треугольника имеем

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

или

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)\,.$$

Если поменять местами *n* и *m*, то получим

$$-\rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \le \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n)$$

или

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \ge -\bigl(\rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)\bigr).$$

Значит,

$$\bigl|\,\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)\bigr| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)\,.$$

Из фундаментальности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon :\quad \forall n, m \geq N \quad \to \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Тогда

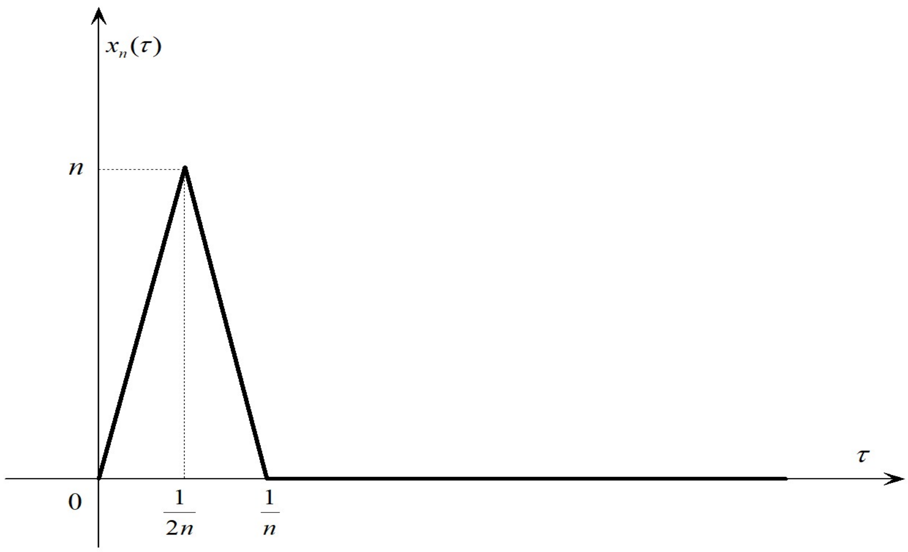
$$\left|\, \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \right| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Значит, последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ фундаментальна, а поскольку она *числовая*, то она и сходящаяся, по критерию Коши.

Пример 03. Во множестве непрерывных на [0,1] функций $x(\tau)$ функциональная последовательность

$$x_n(\tau) = \begin{cases} 2n^2\tau, & \text{если } \tau \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right], \\ 2n(1-n\tau), & \text{если } \tau \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{если } \tau \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

сходится поточечно к функции, тождественно равной нулю (см. рис.).



Но она не будет сходящейся, если метрика задается формулой:

$$\rho(x,y) = \int_0^1 \left| x(\tau) - y(\tau) \right| d\tau .$$

поскольку $\rho(x_n(\tau), 0) = \dfrac{1}{2} n \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} \ \forall n$.

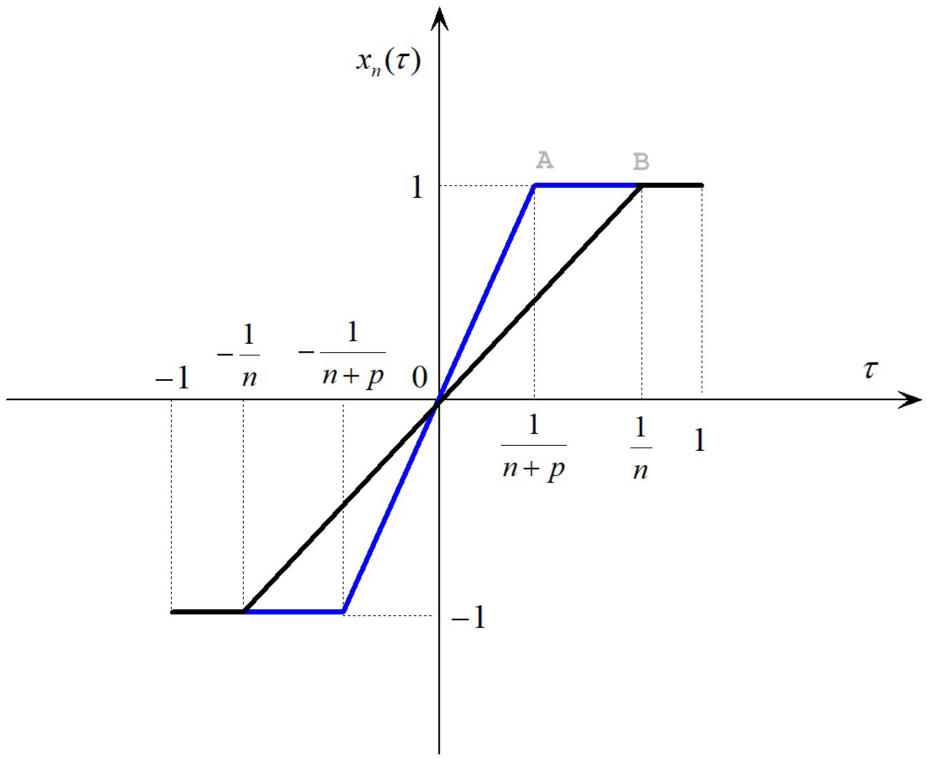
Пример 04. Показать, что линейное пространство, непрерывных на $[-1, 1]$ функций не является полным, если норма определена по формуле

$$\| x(\tau) \| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x^2(\tau)\, d\tau} \ .$$

Решение: 1) Достачно показать, что в линейном пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций $x(\tau)$ функциональная последовательность

$$x_n(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{если } \tau \in \left[-1, -\dfrac{1}{n}\right], \\ n\tau, & \text{если } \tau \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 1, & \text{если } \tau \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

фундаментальна, но не сходится к непрерывной функции (см. рис.2).



Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\tau) = \operatorname{sgn} \tau$, которая не является непрерывной.

2) Покажем, что функциональная последовательность $\{x_n(\tau)\}$ фундаментальная.

Получим оценку для квадрата нормы разности функций $x_{n+p}(\tau)$ и $x_n(\tau)$. Имеем

$$\frac{1}{2}\left\| x_{n+p}(\tau)-x_n(\tau)\right\|^2 = \int\limits_0^{\frac{1}{n+p}}\left[(n+p)\tau-n\tau\right]^2 d\tau+\int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}\left[1-n\tau\right]^2 d\tau =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{n+p}} p^2\tau^2 d\tau+\int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}(1-n\tau)^2 d\tau=\left.\frac{p^2\tau^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{n+p}}+\left.\frac{(n\tau-1)^3}{3n}\right|_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{p^2}{3n(n+p)^2}\le\frac{1}{3n}\,.$$

3) Другие способы оценки.

А) Пусть $n < m$, тогда

$$\| x_n(\tau) - x_m(\tau) \|^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(x_n(\tau) - x_m(\tau) \right)^2 d\tau = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(x_n(\tau) - x_m(\tau) \right)^2 d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(| x_n(\tau) | + | x_m(\tau) | \right)^2 d\tau \le 4 \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} d\tau = \frac{8}{n}.$$

В) Используйте тот факт, что площадь треугольника $0AB$ равна

$$S_{0AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \cdot 1 = \frac{1}{2n} \cdot \frac{p}{n+p} \le \frac{1}{2n} .$$