

## Пояснения к введению в ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Воспользуемся некоторыми понятиями и методами, рассмотренными ранее в курсах математического анализа и линейной алгебры, для построения аналогов координатного описания элементов в линейных пространствах, не имеющих базиса.*

Основной особенностью  $n$ -мерного линейного пространства является существование в нем *базиса*, то есть:

упорядоченного *конечного* набора  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  линейно независимых элементов такого, что добавление в него любого элемента пространства делает этот набор линейно зависимым.

В этом случае *каждый* элемент линейного пространства  $x$  может быть представлен *единственным образом* как линейная комбинация базисных элементов

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j g_j, \quad (1)$$

где упорядоченный набор чисел  $\xi_j$  (называемых *координатами* элемента  $x$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ) дает полное описание этого элемента. Максимально возможное число линейно независимых элементов в линейном пространстве с базисом принято называть *размерностью* пространства.

Известно, что базис существует не в любом линейном пространстве, где имеются линейно независимые элементы. Например, в  $LC[-1, 1]$  – линейном пространстве функций  $x(\tau)$ , непрерывных на отрезке  $\tau \in [-1, 1]$  – набор элементов вида  $\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^k\}$  линейно независим при любом целом неотрицательном  $k$ . Но для этого набора всегда существует элемент  $\tau^{k+1}$ , добавление которого не нарушает линейной независимости (проверьте это самостоятельно). Следовательно, базиса в таком линейном пространстве нет, и в нем невозможно стандартное координатное описание элементов.

С другой стороны, удобства координатного представления элементов линейного пространства вполне очевидны. Поэтому представляется целесообразной попытка обобщения понятия координат таким образом, чтобы их использование оказалось бы возможным и в линейных пространствах с *неограниченным* числом линейно независимых элементов.

Кратко опишем идеи двух возможных подходов к решению этой проблемы.

1) Пусть имеется линейное  $n$ -мерное пространство, в котором определено скалярное произведение элементов  $(x, y)$ , то есть, *евклидово* пространство  $E^n$ . Если  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  – базис в  $E^n$ , то для каждого элемента  $x$  в силу (1) будет верным

$$\sum_{j=1}^n (g_j, g_k) \xi_k = (x, g_k) \quad \forall k = [1, n]. \quad (2)$$

Здесь (2) является системой линейных уравнений, которая (в силу теоремы Крамера) всегда совместна и однозначно разрешима относительно координат, поскольку ее основная матрица есть матрица Грама – не вырожденная для линейно независимого набора элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ .

Заметим, что в случае *ортонормированного* базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  (который всегда существует в  $E^n$ ) система (2) распадается на  $n$  независимых равенств вида

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, n], \quad (3)$$

поскольку  $(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$

С другой стороны, согласно аксиоматике евклидова пространства, скалярное произведение существует независимо от того, является ли данное пространство конечномерным или нет. Поэтому формулы (3) *условно* можно принять за определение координат элемента  $x \in E$  – в евклидовом пространстве с неограниченным числом линейно независимых элементов.

Условия, выполнение которых необходимо, для того, чтобы члены последовательности  $\{\xi_k\}$ , где

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, +\infty), \quad (4)$$

можно было бы рассматривать, как аналоги координат элемента  $x \in E$ , таковы:

- все элементы в наборе линейно независимых  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  должны быть нормированы и попарно ортогональны, то есть,  $(e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in N$ ;
- ряд  $\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$  должен быть сходящимся в некотором  $\Omega \subseteq E$ ;
- сумма этого ряда должна совпадать (или быть близкой в некотором смысле) к  $x$ .

Здесь напомним (в связи с использованием понятия сходимости ряда), что в качестве *нормы* элемента  $x \in E$  можно принять число  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ , а в качестве *метрики* – (меры близости (или расстояния) для элементов  $x$  и  $y$ ) – число  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Это позволяет использовать понятия *фундаментальности* и *сходимости* для последовательности элементов в  $E$  и, конкретно, для последовательностей частичных сумм ряда  $\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$ .

В качестве примера рассмотрим в  $EC[-1, 1]$  – евклидовом пространстве функций  $x(\tau)$ , непрерывных на промежутке  $[-1, 1]$  и со скалярным произведением  $(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau)y(\tau) d\tau$  – последовательность линейно независимых элементов  $\{g_k(\tau) = \tau^k \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Элементы такой последовательности не являются попарно ортогональными. Например,

$$(g_1, g_3) = \int_{-1}^1 g_1(\tau)g_3(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 \tau^4 d\tau = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Однако в этом случае при помощи процедуры ортогонализации Грама–Шмидта (применимой к наборам с неограниченным числом элементов) можно построить ортогональный набор, а после нормировки, и ортонормированный. В результате (это доказывается в курсе гармонического анализа) получается последовательность степенных многочленов вида:

$$e_0(\tau) = 1, \quad e_1(\tau) = \tau, \quad e_2(\tau) = \frac{1}{2}(3\tau^2 - 1), \quad \dots \quad e_k(\tau) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\tau^k} (\tau^2 - 1)^k, \quad \dots,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

И этот новый набор многочленов можно использовать для представления на отрезке  $[-1, 1]$  любой непрерывной функции  $x(\tau)$  при помощи ряда

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k e_k(\tau), \quad \text{где} \quad \xi_k = \int_{-1}^1 x(\tau) g_k(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Ряды вида (5) принято называть *рядами Фурье* и их частичные суммы являются аппроксимациями функции  $x(\tau)$  на всем промежутке  $[-1, 1]$  в то время как степенные ряды (типа ряда Тейлора) дают лишь *локальную* аппроксимацию для фиксированных точек.

2) Вопросы об условиях сходимости и других свойствах рядов Фурье рассматриваются в курсе гармонического анализа. Здесь же мы обратим внимание на то, что ортогональные системы элементов в бесконечномерных евклидовых пространствах можно также строить по схемам, принципиально отличающимся от метода Грама–Шмидта.

Разберем одну из таких схем, основанную на использовании свойств *самосопряженных линейных преобразований* (операторов), действующих в  $E$ .

Напомним предварительно некоторые необходимые сведения из курса линейной алгебры, используя равенство  $y = \hat{A}x$  для обозначения факта: элемент  $y$  есть результат действия преобразования  $\hat{A}$  на элемент  $x$ . Элемент  $y$  принято в этом случае называть *образом* элемента  $x$ , а элемент  $x$  — *прообразом* элемента  $y$ .

- 1°. Линейное преобразование  $\hat{A}^*$  называется *сопряженным* линейному преобразованию  $\hat{A}$ , если  $\forall x, y \in E: (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^*y)$ . То есть, скалярное произведение при действии оператора  $\hat{A}$  на его первый сомножитель совпадает со скалярным произведением при действии  $\hat{A}^*$  на второй сомножитель.
- 2°. Линейное преобразование  $\hat{R}$  называется *самосопряженным* линейным преобразованием, если  $\forall x, y \in E: (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$ .
- 3°. Ненулевой элемент  $f$  называется *собственным вектором* линейного преобразования  $\hat{A}$ , который отвечает *собственному значению*  $\lambda$ , если  $\hat{A}f = \lambda f$ .

4°. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие *различным* собственным значениям, *попарно ортогональны*. При этом, из собственных векторов любого самосопряженного преобразования в  $E^n$  можно образовать *ортонормированный базис*.

5°. Для любого линейного преобразования  $\hat{A}$  линейные преобразования  $\hat{A}\hat{A}^*$  и  $\hat{A}^*\hat{A}$  – самосопряженные и имеют неотрицательные собственные значения.

Напомним доказательства утверждений, приведенных в 4° и 5°.

Пункт 4°. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  – собственные векторы  $\hat{R}$ , тогда из  $\begin{cases} \hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1, \\ \hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2 \end{cases}$  следует

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1(f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2(f_1, f_2). \end{cases}$$

В силу самосопряженности  $\hat{R}$  (то есть равенства левых частей) будем иметь  $\lambda_1(f_1, f_2) = \lambda_2(f_1, f_2)$  и, поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $(f_1, f_2) = 0$ .

Пункт 5°. Справедливы равенства  $\forall x, y \in E: (\hat{A}^*\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^*\hat{A}y)$ . Но это и означает самосопряженность  $\hat{A}^*\hat{A}$ .

Из  $\hat{A}^*\hat{A}f = \lambda f$  имеем равенство  $(\hat{A}^*\hat{A}f, f) = \lambda(f, f)$ . Откуда  $(\hat{A}f, \hat{A}f) = \lambda(f, f)$  и поэтому, в силу аксиоматики евклидова пространства, верно, что  $\lambda \geq 0$ .



Рассмотрим теперь множество всевозможных функций  $x(\tau)$ , имеющих производную *любого* порядка на отрезке  $[-1,1]$ , и имеющих, вместе со своими производными, на концах этого отрезка равные значения. Нетрудно проверить, что это множество есть линейное пространство.

Превратим его в евклидово пространство, введя скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Оператор дифференцирования  $\hat{D} = \frac{d}{d\tau}$  будет линейным преобразованием, действующим в этом пространстве.

Найдем для него сопряженное преобразование. Интегрирование по частям дает равенства

$$(\hat{D}x, y) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau}(\tau)y(\tau) d\tau = x(\tau)y(\tau)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x(\tau)\frac{dy}{d\tau}(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 x(\tau)\left(-\frac{dy}{d\tau}(\tau)\right) d\tau = (x, \hat{D}^*y).$$

Откуда  $\hat{D}^* = -\frac{d}{d\tau}$ . Тогда оператор  $\hat{D}^*\hat{D} = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}\right) = -\frac{d^2}{d\tau^2}$  будет самосопряженным и с неотрицательными собственными значениями.

Найдем для него собственные векторы. Условие  $\hat{D}^* \hat{D} f = \lambda f$  в данном случае (если положить  $\lambda = \omega^2 \geq 0$ ) является дифференциальным уравнением вида

$$-\frac{d^2 f}{d\tau^2} = \omega^2 f,$$

общее вещественное решение которого описывается формулой  $f(\tau) = A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau$ , причем  $A^2 + B^2 \neq 0$ , поскольку собственный вектор ненулевой по своему определению.

Заметим, что в данном случае характеристического уравнения у преобразования  $\hat{D}^* \hat{D}$  нет. Однако собственные значения можно найти, используя условия

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Конкретно здесь получаем, что

$$A \cos \omega l + B \sin \omega l = A \cos \omega(-1) + B \sin \omega(-1) \Rightarrow \sin \omega = 0,$$

то есть,  $\omega = \pi k$ , где  $k$  – любое целое число. Таким образом, система *линейно независимых* попарно ортогональных функций, являющихся собственными векторами самосопряженного оператора  $\hat{D}^* \hat{D}$ , имеет вид

$$f_k(\tau) = A \cos \pi k \tau + B \sin \pi k \tau, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Эта система, называемая обычно *тригонометрической*, (также как и система полиномов Лежандра) может использоваться для аппроксимации на  $[-1, 1]$  функций  $x(\tau)$ , удовлетворяющих, например, краевым условиям (6).

Такая аппроксимация будет иметь вид ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos \pi k \tau + B_k \sin \pi k \tau)$ , где коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  определяются, аналогичными (5), формулами

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau, \quad A_k = \int_{-1}^1 x(\tau) \cos \pi k \tau d\tau \quad \text{и} \quad B_k = \int_{-1}^1 x(\tau) \sin \pi k \tau d\tau \quad k = 1, 2, 3, \dots$$