Элементы теории поля

Пусть Ω − область в E^3 с *правой прямоугольной* декартовой системой координат. Будем обозначать радиус-вектор точки в этой области как $\vec{r}$, с координатным представлением вида $\left\| \vec{r} \right\| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$.

Пусть в области Ω задано *скалярное* поле $f(x,y,z)$ и *векторное* поле $\vec{F}(x,y,z)$ с координатным представлением $\left\| \vec{F} \right\| = \left\| \begin{matrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{matrix} \right\|$.

Введем (по определению) *векторно-дифференциальный оператор* ∇, называемый "*набла*" и имеющий координатное представление в ОНБ $\|\nabla\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right\|$.

Используя этот оператора, следует учитывать, что

1°. ∇ ведет себя как вектор, удовлетворяющий всем правилам действий с векторами;

2°. ∇ является дифференциальным оператором, подчиняющимся правилам дифференцирования. При этом предметом его действия должен быть объект, расположенный *в формуле справа от* ∇.

В случае, когда объект действия набла-оператора не определяется однозначно, необходимо указывать его явно, выделяя в формуле этот объект верхней вертикальной стрелкой.

Пример 1. Записать в координатной форме выражение $(\nabla, \varphi\vec{W})$, где $\varphi(x, y, z)$ − непрерывно дифференцируемое скалярное поле, а $\vec{W}(x, y, z)$ − векторное поле, также непрерывно дифференцируемое, с координатным представлением $\left\| \vec{W} \right\| = \left\| \begin{matrix} W_x(x, y, z) \\ W_y(x, y, z) \\ W_z(x, y, z) \end{matrix} \right\|$.

Решение; Поскольку набла − дифференциальный оператор, то, используя свойства скалярного произведения вектора и ортонормированность базиса, получаем

$$(\nabla, \varphi\vec{W}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{\varphi}\vec{W}) + (\nabla, \varphi\overset{\downarrow}{\vec{W}}) = (\nabla\varphi, \vec{W}) + \varphi(\nabla, \vec{W}) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}W_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}W_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}W_z + \varphi\left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}\right).$$

Одной из основных характеристик, используемых при описании *скалярного* поля является его *градиент*.

Определение: *Градиентом скалярного поля* $f(x,y,z)$ называется векторная функция вида $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. Эта функция имеет координатное представление $\|\operatorname{grad} f\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} \right\|$.

Заметим, что с помощью оператора набла вектор градиента может быть записан так

$$\operatorname{grad} f = \nabla f \ .$$

Для описания свойств векторных полей в приложениях также часто используются две следующие характеристики: скалярная, называемая *дивергенцией*, и векторная, называемая *ротором* (иногда, *ротацией* или *вихрем*).

Определение: *Дивергенцией* векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ называется скалярная функция $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, которая с помощью набла задается формулой $\operatorname{div}\vec{F} = (\nabla, \vec{F})$.

Определение: *Ротором* векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \det\begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix},$$

которая с помощью набла задается формулой $\operatorname{rot}\vec{F} = [\nabla, \vec{F}]$.

Нетрудно убедиться, что, в силу сделанных определений, справедливы следующие равенства $\operatorname{div}\vec{r} = 3$ и $\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{o}$.

Введенные характеристики скалярных и векторных полей допускают использование альтернативных формулировок для:

1) теоремы *Стокса* $\displaystyle\oint\limits_{\partial S}(\vec{F}, d\,\vec{r}\,) = \iint\limits_{S}(\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{F}\,)\,ds$

или $\displaystyle\oint\limits_{\partial S}(\vec{F}, d\,\vec{r}\,) = \iint\limits_{S}(\vec{n}, [\nabla, \vec{F}])\,ds = \iint\limits_{S}(\vec{n}, \nabla, \vec{F}\,)\,ds$,

2) теоремы *Гаусса-Остроградского* $\displaystyle\oiint\limits_{\partial\Omega}(\vec{F}, \vec{n})\,ds = \iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}\,dV$

или $\displaystyle\oiint\limits_{\partial\Omega}(\vec{F}, \vec{n})\,ds = \iiint\limits_{\Omega}(\nabla, \vec{F}\,)\,dV$.

Классификация векторных полей

Векторные поля принято классифицировать при помощи количественных характеристик, называемых *циркуляцией* и *потоком,* а также *потенциалом*. Мы будем считать, что все поля непрерывно дифференцируемые, а линии и поверхности кусочно-гладкие.

Определение: *Линейным интегралом* (*или работой*) векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ по линии Γ называется интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(\vec{F},d\,\vec{r}) = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

Если линия *замкнутая*, то интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(\vec{F},d\,\vec{r})$ называется *циркуляцией* поля $\vec{F}(x,y,z)$ по линии Γ

Использование свойств криволинейных и поверхностных интегралов позволяет иолучать описание свойств скалярных и векторных полей в *интегральной* форме.

1°. Для скалярного поля *f* и линии *Г*, идущей из точки *A* в точку *B,* в некоторой области Ω, справедливо равенство $\int\limits_{\Gamma}(\operatorname{grad} f, d\vec{r}) = f(B) - f(A)$. В частности, для векторного поля $\operatorname{grad} f$ его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

2°. Для векторного поля $\vec{F}$ и поверхности *S*, ориентированной единичным вектором нормали $\vec{n}$, имеющей согласованно ориентированный край ∂S, теорема Стокса дает $\oint\limits_{\partial S}(\vec{F}, d\vec{r}) = \iint\limits_{S}(\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{F})\,ds$.

То есть, *циркуляция* $\vec{F}$ *по замкнутому краю поверхности равна потоку ротора поля через эту поверхность*.

3°. По формуле Гаусса-Остроградского $\oiint\limits_{\partial V}(\vec{F}, \vec{n})\,ds = \iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{F}\,dV$.

Другими словами, *поток векторного поля* $\vec{F}$ *через внешнюю сторону замкнутой поверхности* ∂V *, ограничивающую тело V, равен тройному интегралу дивергенции поля по этому телу*.

Векторные поля также принято классифицировать по их свойствам. В частности, в теории поля используются понятия *потенциального*, *безвихревого* и *соленоидального* векторного поля.

Определение: Векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$ называется *потенциальным*, если существует такая функция $f(x,y,z)$, что $\vec{F} = \operatorname{grad} f$. Функцию $f(x,y,z)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{F}(x,y,z)$ в области Ω является равенство нулю его циркуляции по любому замкнутому контуру $\varGamma$ в Ω, т.е. $\oint\limits_{\varGamma}(\vec{F}, d\,\vec{r})$. Условие $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{o}$ является лишь необходимым. Достаточным оно оказывается в случае односвязной области Ω.

Определение: Векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{o}$.

В любой односвязной области безвихревое поле потенциально.

Определение: Векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$ называется *соленоидальным*, если для любой замкнутой области $V\subset\Omega$ с границей ∂V поток поля через эту границу равен нулю, т.е. $\oiint\limits_{\partial V}(\vec{F},\vec{n})\,ds=0$.

Для соленоидальности поля $\vec{F}$ в области Ω необходимо и достаточно, чтобы в этой области $\operatorname{div}\vec{F}=0$.

Отметим, в заключение, любопытный факт (называемый в теории поля теоремой Гельмгольца), что любое непрерывно дифференцируемое поле представимо как сумма безвихревого и соленоидального полей.

Пример 2. Найти, используя оператор набла,

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$,

2) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}$,

3) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$,

Решение: Учитывая, что набла одновременно обладает свойствами вектора и дифференциального оператора, получаем:

1) Воспользуемся тем, что из векторного произведения можно выносить скалярный множитель, который мы обязаны записать *справа* от действующего на него оператора, а также тем, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулевому вектору. Тогда получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = \vec{o} \ .$$

2) В этом случае воспользуемся возможностью циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении и коммутативностью скалярного произведения для соблюдения требовании расположения оператора. В результате имеем:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = (\nabla, [\nabla, \vec{F}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{F}) = (\vec{o}, \vec{F}) = 0 \ .$$

3) Имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) = (\nabla, \nabla f) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = \Delta f \ ,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Пример 3. Для известных векторных полей $\vec{A}(x,y,z)$ и $\vec{B}(x,y,z)$ найти $\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}]$.

Решение: Используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. В этом случае можно записать:

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}] = (\nabla,\overset{\downarrow}{[}\vec{A},\vec{B}]) = (\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}]) + (\nabla,[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) =$$

$$= (\vec{B},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{A}}]) + (\vec{A},[\overset{\downarrow}{\vec{B}},\nabla]) = (\vec{B},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{A}},]) - (\vec{A},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) =$$

$$= (\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}) - (\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B})\,.$$

Пример 4. Для известных полей $f(x,y,z)$ и $\vec{F}(x,y,z)$ найти $\operatorname{rot}(f\vec{F})$.

Решение: Снова используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. Тогда имеем:

$$\operatorname{rot}(f\vec{F}) = [\nabla,(\overset{\downarrow}{f\vec{F}})] = [\nabla,(\overset{\downarrow}{f}\,\vec{F})] + [\nabla,(f\,\overset{\downarrow}{\vec{F}})] =$$

$$= [\nabla f,\vec{F}] + f[\nabla,\vec{F}] = [\operatorname{grad} f,\vec{F}] + f\operatorname{rot}\vec{F}\ .$$

Пример 5. 1) Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
2) Для какого скалярного поля будет $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)=0$?

Решение: `1) Введем обозначения $P=\frac{\partial f(r)}{\partial x}$; $Q=\frac{\partial f(r)}{\partial y}$; $R=\frac{\partial f(r)}{\partial z}$. Тогда имеем

$$P=\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df}{dr}\cdot r'_x=f\,'(r)\cdot\frac{x}{r}$$

$$Q=\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f\,'(r)\cdot\frac{y}{r};$$

$$R=\frac{\partial f(r)}{\partial z}=f\,'(r)\cdot\frac{z}{r}.$$

Откуда $\operatorname{grad} f(r)=\frac{f\,'(r)}{r}\vec{r}$.

С другой стороны,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{f\,'(r)}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f\,'(r)}{r}) = \frac{f\,'(r)}{r} + x\frac{d}{dr}(\frac{f\,'(r)}{r}) \cdot r\,'_x =$$

$$= \frac{f\,'(r)}{r} + x\frac{rf\,''(r) - f\,'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{f\,'(r)}{r} + x^2\,\frac{rf\,''(r) - f\,'(r)}{r^3}\,.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{f\,'(r)}{r} + y^2\,\frac{rf\,''(r) - f\,'(r)}{r^3} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{f\,'(r)}{r} + z^2\,\frac{rf\,''(r) - f\,'(r)}{r^3}$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \frac{3f\,'(r)}{r} + \frac{rf\,''(r) - f\,'(r)}{r^3}r^2 = f\,'' + \frac{2f\,'(r)}{r}$$

2) Теперь найдем, для какого поля имеет место $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = 0$.

Решим уравнение $f'' + \dfrac{2f'(r)}{r} = 0$.

Понизим порядок заменой $u(r) = f'(r)$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' + \dfrac{2u}{r} = 0$. Это дает, например методом разделения переменных, $u(r) = \dfrac{C_1}{r^2}$. Откуда, окончательно,

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \forall C_1, C_2 .$$

Пример 6. Показать, что поток векторного поля $\vec{F} = \vec{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

Решение: `Справедливость утверждения следует из формулы Гаусса-Остроградского и равенства $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.

Пример 7. Показать, что из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме следует, что напряженности как электрического, так и магнитного полей удовлетворяют однородному *уравнению гармонических колебаний*.

Решение: `1) Уравнения Максвелла в данном случае могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Если взять ротор от обеих частей первого уравнения, то получим равенство \

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}\,,$$

правая часть которого есть, в силу третьего уравнения $-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, а левая вычисляется при помощи оператора набла и формулы для двойного векторного произведения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = [\nabla,[\nabla,\vec{E}]] = \nabla(\nabla,\vec{E}) - (\nabla,\nabla)\vec{E} = \operatorname{grad}\ \operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}\,.$$

Поскольку в силу второго уравнения системы $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, то мы приходим к уравнению $\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Для поля $\vec{B}$ рассуждения аналогичные.

Пример 8. Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Для какой дифференцируемой функции $\Phi(r)$ поле вида $\vec{F} = \Phi(r)\,\vec{r}$ будет соленоидальным?

Решение: `1) Необходимое и достаточное условие соленоидальности поля $\vec{F}$ имеет вид $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ или $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$. Поэтому вначале найдем частные производные от компонент $\vec{F}$.

Поскольку $\left\|\vec{F}\right\| = \left\| x\Phi(r) \quad y\Phi(r) \quad z\Phi(r) \right\|^{\mathrm{T}}$, то имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \Phi'_r\,\frac{x^2}{r} + \Phi\,,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \Phi'_r\,\frac{y^2}{r} + \Phi\,,$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = \Phi'_r\,\frac{z^2}{r} + \Phi\,.$$

2) Тогда условие $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ принимает вид $\frac{d\Phi}{dr} r + 3\Phi = 0$.

Решив полученное дифференциальное уравнение (например, методом разделения переменных), получим, что $\Phi(r) = \frac{C}{r^3}$.