КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В E^3 с ОНБ **заданы:**	**Скалярное поле** $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$	**Векторное поле** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{cases}$
Линия $\boldsymbol{L}$ $\vec{r} = \vec{r}(t)\ t \in [\alpha,\beta]$ или в координатах $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ Функции $x(t), y(t), z(t)$ непрер. дифф. для $t \in [\alpha,\beta]$	*Криволинейный интеграл первого рода* $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl =$ $= \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$	*Криволинейный интеграл второго рода* $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x_t' + Q(x(t),y(t),z(t))y_t' + R(x(t),y(t),z(t))z_t')\,dt$
Поверхность $\boldsymbol{S}$ $\vec{r} = \vec{r}(u,v)\quad (u;v) \in \Omega \subseteq E^2$ или в координатах $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ Функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ непр.о дифф. для $(u;v) \in \Omega \subseteq E^2$	*Поверхностный интеграл первого рода* $\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds =$ $= \iint\limits_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$, где $E = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2$ $G = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$ $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$	*Поверхностный интеграл второго рода* $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$ $= \iint\limits_\Omega \begin{vmatrix} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) & Q(\ldots\ldots\ldots) & R(\ldots\ldots\ldots) \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv$

Таблица 5.1

Свойства криволинейных и поверхностных интегралов

Криволинейный интеграл первого рода при изменении направления обхода не меняет знака, а второго рода – меняет на противоположный.

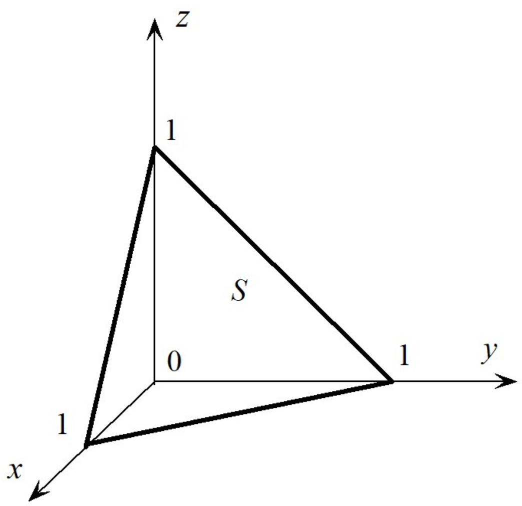
Поверхностный интеграл первого рода при изменении ориентации поверхности не меняет знака, а второго рода – меняет на противоположную.

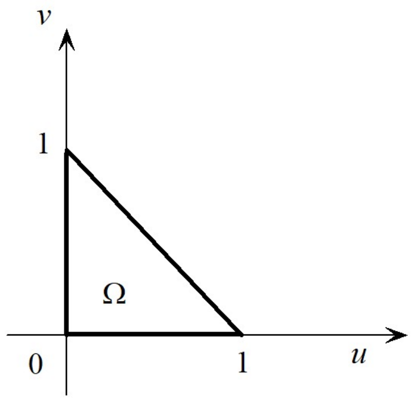
Свойства криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала:

– зависит только от начальной и конечной точки линии и не зависит от формы линии,

– значение по замкнутому контуру (внутри которого нет особых точек) равно нулю.

Пример 01 .Вычислить $I = \iint\limits_S xyz\,ds$, где $S: \begin{cases} x+y+z=1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ z \ge 0 \end{cases}$.





Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S: \begin{cases} x(u,v)=u, \\ y(u,v)=v, \\ z(u,v)=1-u-v \end{cases}$,

где $(u,v) \in \Omega$.

2) В нашем случае $f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = uv - u^2v - uv^2$,.

3) Находим $E=2, G=2, F=1$ $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{3}$.

4) Формулируем и вычисляем интеграл $I = \iint\limits_\Omega (uv - u^2v - uv^2)\sqrt{3}\,dudv = \dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

Пример 02 (1 способ) .Вычислить $I=\iint\limits_S z\,dxdy$, где S − эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0, b>0, c>0$.

Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S: \begin{cases} x(u,v)=a\cos u\cos v, \\ y(u,v)=b\sin u\cos v, \\ z(u,v)=c\sin v, \end{cases}$

где $(u,v)\in\Omega=\begin{cases} 0\le u<2\pi \\ -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

2) Формулируем и вычисляем интеграл

$$I=\iint\limits_\Omega \det\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & c\sin v \\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v \end{matrix}\right\| dudv=\iint\limits_\Omega Hc\sin v\,dudv,$$

где $H=ab\sin v\cos v$.

Таким образом, $I=\iint\limits_\Omega abc\sin^2 v\cos v\,dudv=\frac{4\pi}{3}abc$.

Пример 02 (2 способ) .Вычислить $I = \iint\limits_S z\,dxdy$, где S − эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0, b>0, c>0$.

Решение: 1) В данном случае поверхность, по которой берется интеграл, образована графиками функций $z(x,y) = \pm c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$, а сам интеграл представим в виде

$$I = \pm c\iint\limits_D \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dxdy$$

где D − область определения функции $z(x,y)$.

Знак перед интегралом берется "+", если вектор нормали образует острый угол с осью z, и "−", если этот угол тупой.

2) Возьмем интеграл сначала по верхней половине эллипсоида, перейдя к обобщенным полярным координатам:
$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi. \end{cases}$$
Проверьте самостоятельно, что модуль якобиана при такой замене равен abr , а область D^* есть прямоугольник $\{0 \le r \le 1, 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Тогда мы получаем
$$I^+ = abc\iint\limits_{D^*}\sqrt{1-r^2}\,r\,drd\varphi = abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr = \pi abc\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr^2 =$$
$$= \pi abc\left(-\frac{2\left(1-r^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1\right) = \frac{2\pi}{3}abc\,.$$
Для интеграла по нижней части эллипсоида мы имеем $z(x,y) \le 0$ и тупой угол между вектором внешней нормали и положительным направлением оси Oz . Значит, интеграл по нижней половине поверхности I^- будет равен интегралу по верхней I^+.

Окончательно получаем $I = I^+ + I^- = \dfrac{4\pi}{3}abc$.

ФОРМУЛА ГРИНА

Определение и свойства

Пусть ∂G есть кусочно-гладкий контур, являющийся границей плоской ограниченной области G.

Тогда, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}$, то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial G} Pdx + Qdy$$

Направление обхода контура таково, что в процессе обхода область G остается *слева*.

Важно: непрерывная дифференцируемость функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ требуется не только на кусочно-гладком контуре ∂G, но и *внутри всей* области $\overline{G}$.

Пусть Γ_{AB} некоторая кусочно-гладкая линия целиком лежащая в области G, причем A − ее начало, а B − ее конец. Тогда значение интеграла $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ *не зависит от формы траектории интегрирования* тогда и только тогда, когда $\exists u(x,y)$ такая, что $du = Pdx + Qdy$.

В этом случае
$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

Необходимое условие независимости значения интеграла от пути интегрирования есть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. А, если область G *односвязная*, то это условие достаточное.

Наконец, из формулы Грина следует, что площадь области G может находиться по формуле
$$S = \iint\limits_{G} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} xdy - ydx.$$

Пример 03. Вычислить $\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy$, где $G:\quad \{x^2+y^2\le R^2\}$.

Решение: Имеем

$$\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy=\iint\limits_G(1+y^2-1+x^2)\,dxdy=\iint\limits_G(x^2+y^2)\,dxdy=$$

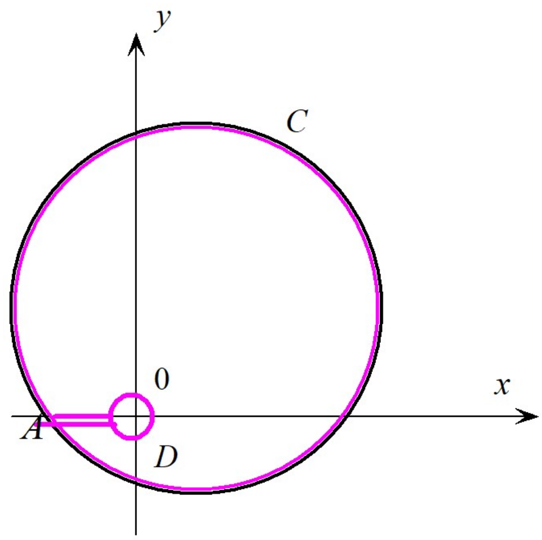
переходя к полярным координатам с $J=r\,drd\varphi$,

$$=\iint\limits_{G^*}r^2r\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Пример 04. Вычислить $I_C = \oint\limits_{\partial G} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где ∂G - простой контур, не проходящий через начало координат и обходящий область G, оставляя ее слева..

Решение: Имеем $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Означает ли это, что $I_C = 0$?

\ Не обязательно!



Дело в том, что исходный ("черный") контур интегрирования может иметь *внутреннюю особую точку* 0 .

Если контур C не охватывает эту точку, то ответ будет $I_C = 0$.

Если особая точка внутри "черного" контура, то построим "лиловый" контур (как показано на рисунке), добавив разрез $A0$ и достаточно малую окружность, охватывающую особую точку.

Пусть интегралы будут равны:

I_+ - по "верхнему берегу" разреза,

I_- - по "нижнему берегу" разреза,

I_D - по "маленькой окружности" вокруг 0,

I_L - по "лиловому" контуру.

Имеем $I_{-} = -I_{+}$.

I_D вычислим непосредственно. Пусть параметризация "маленькой окружности" выбрана такой: $\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi)$,
где a - достаточно малое положительное число.

Тогда, учитывая, что при обходе круга D, он остается справа, получим

$$I_D = \oint\limits_D \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t \cdot a\cos t - a\sin t \cdot (-a\sin t)}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = -\int\limits_{0}^{2\pi} dt = -2\pi .$$

Наконец, $I_L = 0$, поскольку внутри "лилового" контура нет особых точек.

Из свойства аддитивности интеграла следует, что $I_L = I_{+} + I_D + I_{-} + I_C = 0$. Тогда искомый интеграл будет равен

$$I_C = 2\pi .$$

ВЫБОР СТОРОНЫ ПОВЕРХНОСТИ
(*Система координат правая прямоугольная!*)

Параметризация гладкой поверхности $S:\quad \vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(u,v)\quad (u;v)\in\Omega\subseteq E^2$, или в право-ориентированной прямоугольной системе координат: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, определяет не только *поверхность*, но и *ее сторону* направлением вектора нормали $\vec{n}$.

Действительно, пусть функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ непрерывно дифференцируемые в Ω и пусть в Ω выбрана точка (u_0,v_0) .

Введем в рассмотрение векторы $\vec{r}_u{}' = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{Vmatrix}$ и $\vec{r}_v{}' = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix}$. Если они неколлинеарны, то их векторное произведение есть ненулевой *вектор нормали* $\vec{n} = [\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']$. Такую точку (u_0,v_0) принято называть *неособой*. Нормированный вектор нормали называется *ориентацией* поверхности в точке (u_0,v_0) .

В каждой неособой точке поверхность может иметь только две ориентации: *положительную* $+\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ и *отрицательную* $-\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Выбор одной из ориентаций определяет *сторону* поверхности.

Отметим, наконец, что ориентация может являться *непрерывной* функцией точки поверхности, а может и не являться.

Примером второго случая является известный *лист Мёбиуса*, параметрическая форма задания которого может, например, иметь такой вид:

$$\begin{cases} x(u,v) = (1+v\cos u)\cos 2u, \\ y(u,v) = (1+v\cos u)\sin 2u, \\ z(u,v) = v\sin u, \end{cases} \quad \text{с областью } \Omega = \begin{Bmatrix} 0 \le u < \pi, \\ -\dfrac{1}{2} \le v \le \dfrac{1}{2}. \end{Bmatrix}$$

Направляющие косинусы

Из курса линейной алгебры известно, что в ОНБ $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ для координат вектора $\vec{r}$ имеют место равенства $x_i = (\vec{r},\vec{e}_{\backslash})\quad i = 1,2.3$.

Из этой формулы следует, что, если $\vec{n}$ - нормированный (с единичной длиной) вектор, то $\vec{n} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Vmatrix}$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $-$ углы между вектором $\vec{n}$ и ортами $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$.

Пример 05: Сфера S : радиусом R и с центром в начале координат может параметрически быть задана так:

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\sin u\cos v \\ z = R\sin v \end{cases} \quad \Omega = \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

При этом $\vec{n} = R^2 \begin{Vmatrix} \cos u\cos^2 v \\ \sin u\cos^2 v \\ \sin v\cos v \end{Vmatrix}$ и видно, что при $v \ne \pm\dfrac{\pi}{2}$ будет $\vec{r} = k\vec{n}$, где $k = R\cos v > 0$. Значит, это *положительная* ориентация и *внешняя* нормаль.

Обратите внимание, что данная параметризация не является *взаимно однозначным* отображением $\Omega \to S$.

Поверхностный интеграл второго рода, в случае, когда ориентация поверхности (то есть, непрерывная вектор-функция $\vec{n}(\vec{r})$), задана, может быть выражен через поверхностный интеграл первого рода.

Действительно, пусть $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \cos\beta + \vec{e}_3 \cos\gamma$, тогда поверхностный интеграл второго рода равен (это − определение, согласующееся с формулой в таблице 5.1 !)

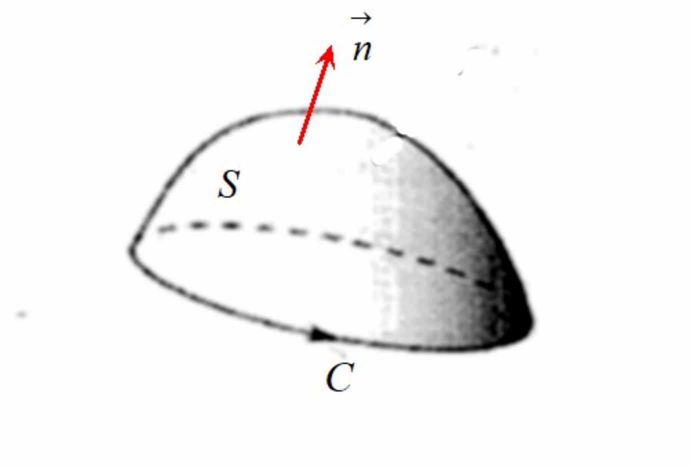
$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)ds,$$

поскольку геометрически понятно, что в ортонормированной системе координат для плоской фигуры S , имеющей площадь ds (а в пределе, и для гладкой S) справедливы равенства

$$\begin{cases} dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = \cos\gamma\,ds, \\ dydz = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv = \cos\alpha\,ds, \\ dzdx = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv = \cos\beta\,ds. \end{cases}$$

Формула Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx$$



В формуле Стокса направление обхода контура C и направление нормали к поверхности S должны быть *согласованы*.

Согласование означает, что:

> наблюдатель, движущийся по направлению обхода контура C так, что при направлении нормали S от "ног к голове", видит поверхность S слева от себя.

Заметим, что при $dz = 0$ формула Стокса превращается в формулу Грина.

Другой вариант записи формулы Стокса

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \det \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix} ds \,,$$

где в первой строке матрицы детерминанта стоят направляющие косинусы нормированного вектора $\vec{n}$, обеспечивающего согласование.

Пример 06. Вычислить $I_C = \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C - окружность

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\},$$

ориентированная против часовой стрелки, если на нее смотреть с конца оси $0x$.

Решение: 1) Интеграл I_C можно вычислять просто по определению криволинейного интеграла второго рода. Однако, в этом случае необходимо найти параметрическое описание окружности C.

Использование формулы Стокса позволяет более просто решить задачу. Действительно, поскольку поверхность S может быть любой, то в качестве S возьмем часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченной контуром C.

По правилу согласования в нашем случае нормальный нормированный вектор $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|$ одинаков для всех точек S, а векторное поле имеет вид $\vec{F} = \left\|\begin{matrix}y\\z\\x\end{matrix}\right\|$.

2) Для производных векторного поля

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \end{cases}.$$

Поэтому, окончательно, по формуле Стокса, находим

$$I_C = \iint\limits_S \left((-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint\limits_S ds = -\pi\, a^2 \sqrt{3} \,.$$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть S кусочно-гладкая граница замкнутой области V с *непрерывно дифференцируемым* векторным полем, тогда справедлива формула *Гаусса-Остроградского*

$$\oiint\limits_{S} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz\,,$$

если S − *внешняя* сторона границы области V .

Пример 02 (3 способ)

Вычислить $I = \iint\limits_S z\,dxdy$, где S − эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0, b>0, c>0$.

Решение:

Поскольку поверхность эллипсоида замкнутая и гладкая, то применим формулу Гаусса-Остроградского. Для векторного поля с $\vec{F}(x,y,z)=\begin{Vmatrix}0\\0\\z\end{Vmatrix}$ имеем $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$. Поэтому $I=\oiint\limits_S z\,dxdy=\iiint\limits_V dxdydz$.

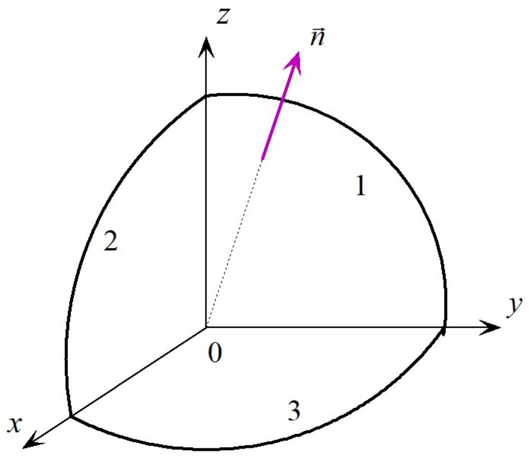
Последний интеграл равен объему тела, ограниченного поверхностью S. Мы знаем, что объем тела, ограниченного эллипсоидом равен $\frac{4\pi}{3}abc$. Значит, окончательно,

$$I=\frac{4\pi}{3}abc\,.$$

Пример 07. Найти $I = \iint\limits_S x^2 y\, dydz + xy^2 dzdx + xyz\, dxdy$,

где S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$,

находящаяся в положительном октанте.



Решение: 1) Поскольку поверхность S незамкнутая, то сделаем ее замкнутой, добавив к ней части координатных плоскостей 1, 2 и 3, как показано на рисунке.

2) Заметим, что на координатных плоскостях 1 и 2 поверхностный интеграл *нулевой*, поскольку векторное поле нулевое, т.к. здесь $P = Q = R = 0$.

На плоской границе 3 поверхностный интеграл также *равен нулю*, в силу $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ и $R = 0$.

3) Значит, можно применить формулу Гаусса-Остроградского для замкнутой области V. Имеем

$$\begin{cases} P(x,y,z) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \\ Q(x,y,z) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xy, \\ R(x,y,z) = xyz \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = xy. \end{cases}$$

Откуда, переходя в тройном интеграле к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

получим

$$I = \iiint\limits_V 5xy\,dxdydz = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{R} (r\cos\varphi\cos\psi)\cdot(r\sin\varphi\cos\psi)\,r^2\cos\psi\,dr =$$

$$= R^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi = \frac{1}{3}R^5.$$