КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Двойные интегралы

В начале, для большей наглядности, рассмотрим двумерный случай.

Пусть дана дважды непрерывная в некоторой, измеримой по Жордану (с мерой μ), области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x,y)$.

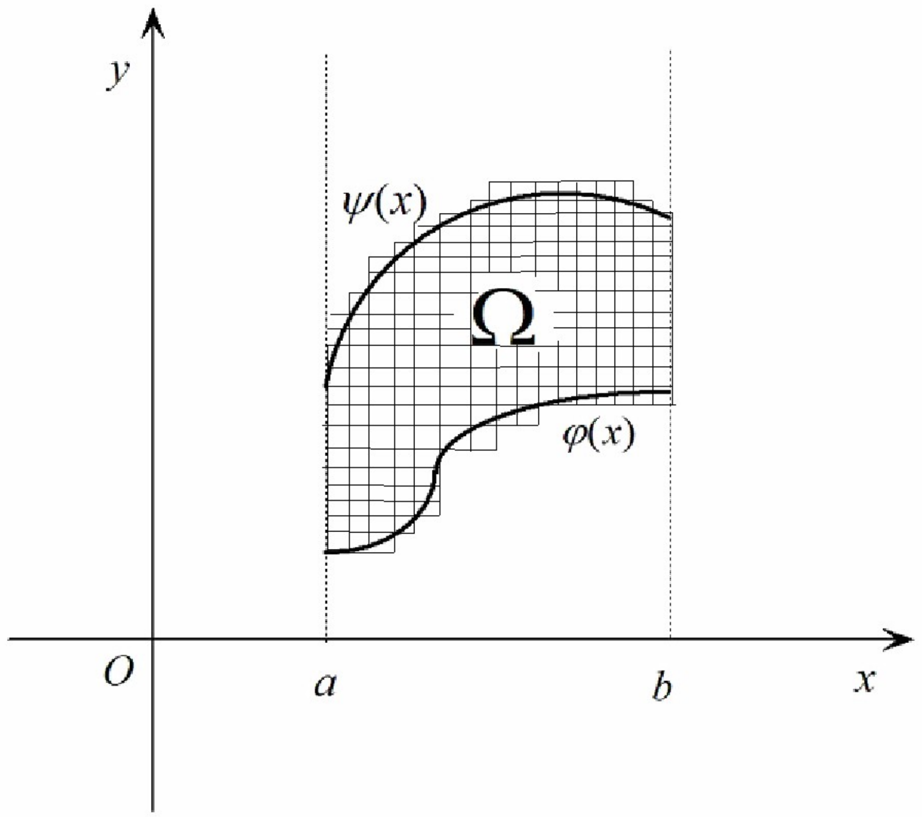
И пусть для этого множества выполнено разбиение на подмножества $\{\Omega_k \; k=[1,N]\}$ с *мелкостью* этого разбиения, определяемого, например, величиной $\tau = \max\limits_{k=[1,N]}\{\mu(\Omega_k)\}$. Хотя более точно использовать в качестве τ − "диаметр" Ω , т.е. $\tau = \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega_k \\ k=[1,N]}}\{|\,x-y\,|\}$.

Далее, в каждом подмножестве Ω_k выбрана произвольная точка $\left\|\begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix}\right\|$, совокупность которых обозначим Θ_τ .

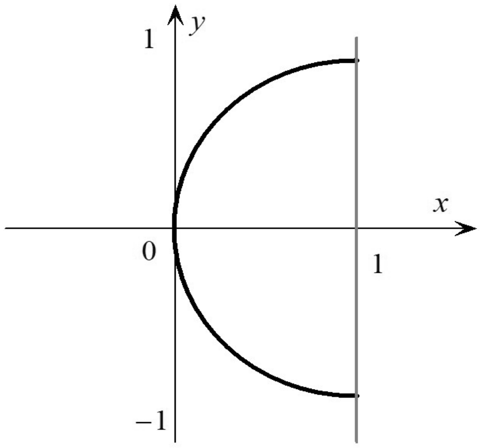
Тогда *римановской суммой* от функции $f(x,y)$ по области Ω называется выражение вида $\sigma_\tau(f;\Theta_\tau) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(x_k, y_k)\mu(\Omega_k)$.

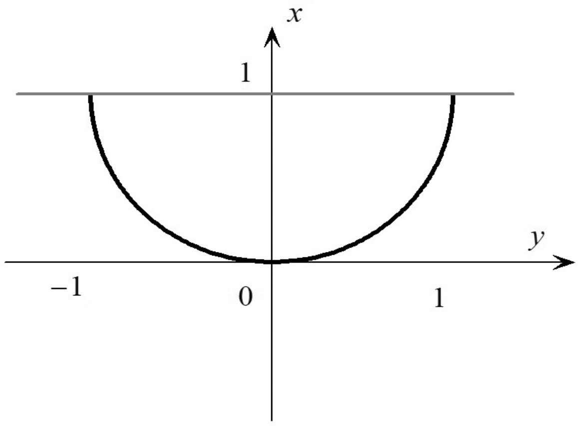
Двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области Ω называется число $I = \lim\limits_{\tau \to 0} \sigma_\tau$ - *предел* ее римановской суммы при мелкости разбиения $\tau \to 0$.

Область Ω называется *элементарной относительно оси* Oy, если существуют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $x \in [a,b]$, такие, что $\Omega = \begin{cases} \varphi(x) \le y \le \psi(x), \\ x \in [a,b]. \end{cases}$



Если область Ω элементарна относительно оси Oy, то двойной интеграл, обозначаемый как $J = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, равен $J = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$.





Пример 1: Найти $I = \iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, если $\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \le x \le 1, \\ y^2 \le x. \end{Bmatrix}$

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy и $\varphi(x) = -\sqrt{x}, \psi(x) = \sqrt{x}$. Поэтому

$$I = \iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \int\limits_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

2) Можно также заметить, что область Ω элементарна относительно оси Ox с $\varphi(y) = y^2, \psi(y) = 1$. Значит, двойной интеграл можно считать иначе

$$I = \iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy = \int\limits_{-1}^1 y^2 dy \int\limits_{y^2}^1 xdx = \int\limits_0^1 y^2\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^1\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2(1-y^4)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 y^2(1-y^4)dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}.$$

3) Результаты получились одинаковые. Это теорема!

Пример 2: Найдите двойной интеграл $I = \iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dxdy$, если область имеет вид $\Omega = \left\{\begin{matrix} 2 \le x \le 3, \\ x \le y \le 2x. \end{matrix}\right\}$, выбрав наиболее удобный порядок последовательного интегрирования.

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy с $\varphi(x) = x, \psi(x) = 2x$.

Относительно оси Ox она не элементарна, но ее можно разбить на три части, каждая из которых элементарна относительно оси Ox. Однако придется считать три двойных интеграла по областям I, II, III. Свойство адитивности интеграла.

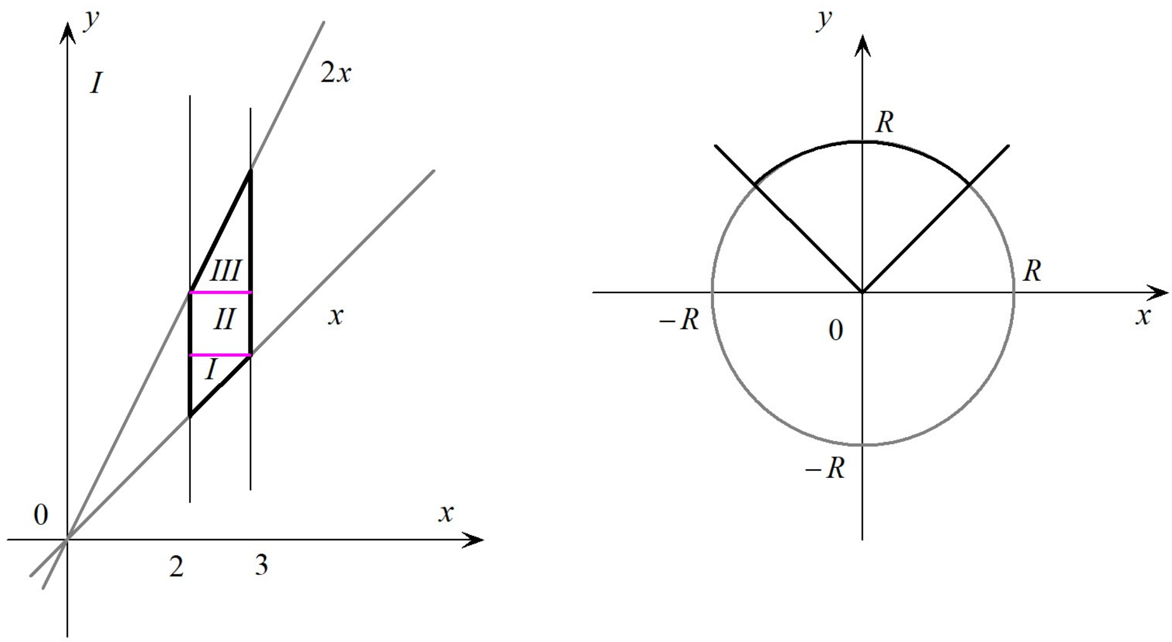
2) Поэтому лучше считать так:

$$I = \iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy = \int\limits_2^3 [(xy+y^2)\Big|_x^{2x}]dx =$$

$$= \int\limits_2^3 [(2x^2+4x^2)-(x^2+x^2)]dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dy = \frac{76}{3}.$$

Нередко вычисление двойных интегралов можно упростить, сделав подходящую нелинейну замену переменных.

Пример 3: Найдите двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dxdy$, если область имеет вид $\Omega=\left\{\begin{matrix} x^2+y^2\le R^2, \\ |\,x\,|\le y. \end{matrix}\right\}$, перейдя в *полярную* систему координат.



Решение: 1) Область Ω элементарна относительно осей Oy и Ox с границами $\varphi(x) = |\,x\,|,\quad \psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, но интегралы получаются довольно сложные.

2) Существенно проще вычисления оказываются, если перейти в полярную систему координат по формулам $\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha. \end{cases}$.

При переходе от переменных $\{x, y\}$ к переменным $\{r, \alpha\}$ будет верным (это теорема!) равенство $dxdy = |\,J\,|\,drd\alpha$, где J − это *якобиан* (определитель матрицы Якоби).

Найдем *модуль якобиана* в рассматриваемом случае. Имеем

$$|\,J\,| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\alpha)}\right| = |\det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} \end{Vmatrix}| = |\det\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{Vmatrix}| = r\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = r\,.$$

То есть при используемой замене $dx\,dy = r\,dr\,d\alpha$, и задача сводится к нахождению двойного интеграла вида

$$I = \iint\limits_{\Omega^*} (r\cos\alpha + r\sin\alpha)\,r\,dr\,d\alpha\,,$$

где область Ω^* есть *прямоугольник* $\begin{cases} 0 \le r \le R, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$ в переменных r и α .

3) Поскольку интегралы по полярным координатам оказываются на прямоугольнике Ω^* независимыми, то вычисления сильно упрощаются:

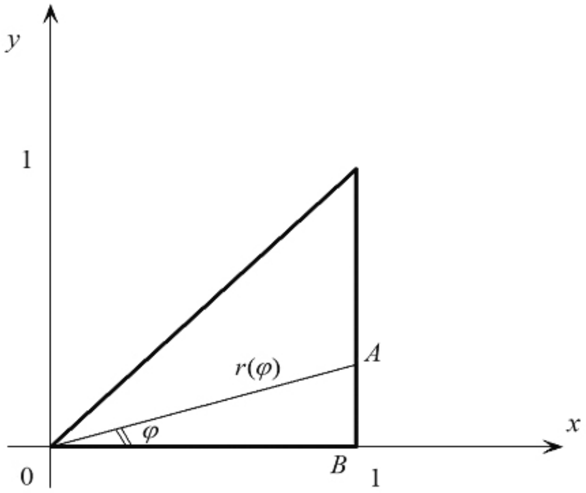
$$I = \iint_{\Omega^*} (r\cos\alpha + r\sin\alpha)\, r\, dr\, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\alpha + \sin\alpha) d\alpha \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \frac{R^3}{3}(\sin\alpha - \cos\alpha)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{R^3\sqrt{2}}{3}\,.$$

Задача 3: в интеграле $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если

1) $\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ y \ge 0, \\ x \ge y, \end{cases}$ 2) $\Omega: \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x + y \le 1. \end{cases}$

Решение: 1)

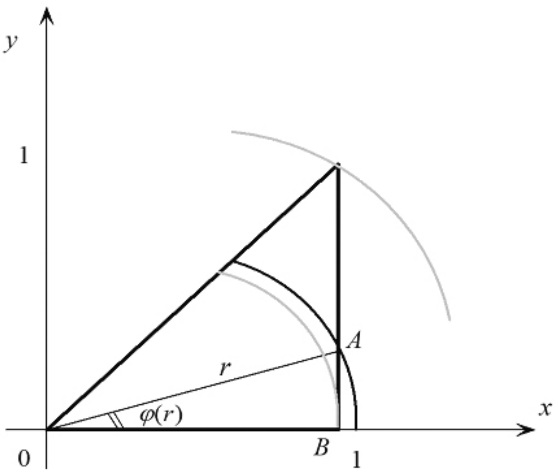


а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$,

где $r(\varphi) = |0A|(\varphi)$.

В нашем случае, из $\Delta 0AB$ следует, что $\cos\varphi = \dfrac{1}{r(\varphi)}$. Поэтому $r(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ и, окончательно,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr \cdot$$

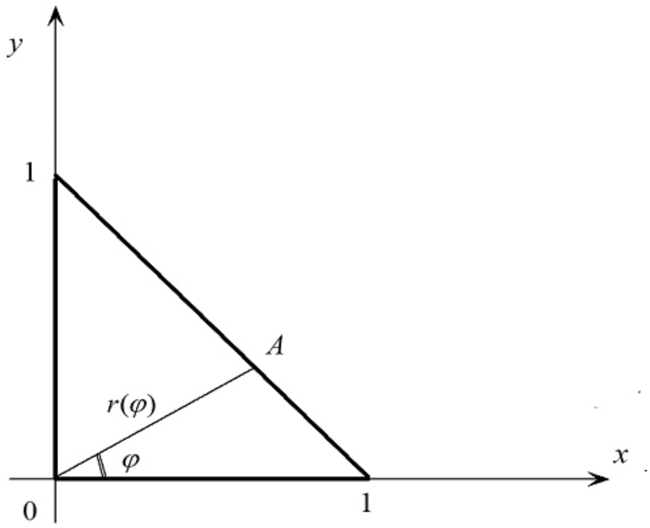


b) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда

$$I=\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+\int\limits_1^{\sqrt{2}} rdr\int\limits_{\varphi(r)}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,,$$

где из $\Delta 0AB$ находим, что $\cos\varphi(r)=\frac{1}{r}$ или $\varphi(r)=\arccos\frac{1}{r}$. То есть,

$$I=\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+\int\limits_1^{\sqrt{2}} rdr\int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$



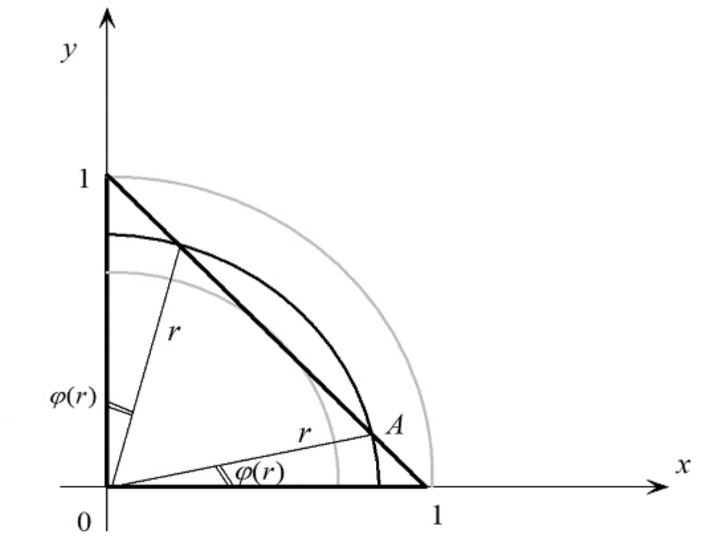
2)

а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{r(\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr$,

где $r(\varphi)=\left|0A\right|(\varphi)$.

В нашем случае, из принадлежности точки *A* гипотенузе следует, что $x_A+y_A=1$ или, в полярных координатах, $r(\varphi)\cos\varphi+r(\varphi)\sin\varphi=1 \;\Rightarrow\; r(\varphi)\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Поэтому $r(\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}$ и, окончательно $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr.$



b) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда удобно разбить промежуток изменения r на два: $r\in[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ и $r\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$. Тогда получим, что интеграл по всей области представим в виде

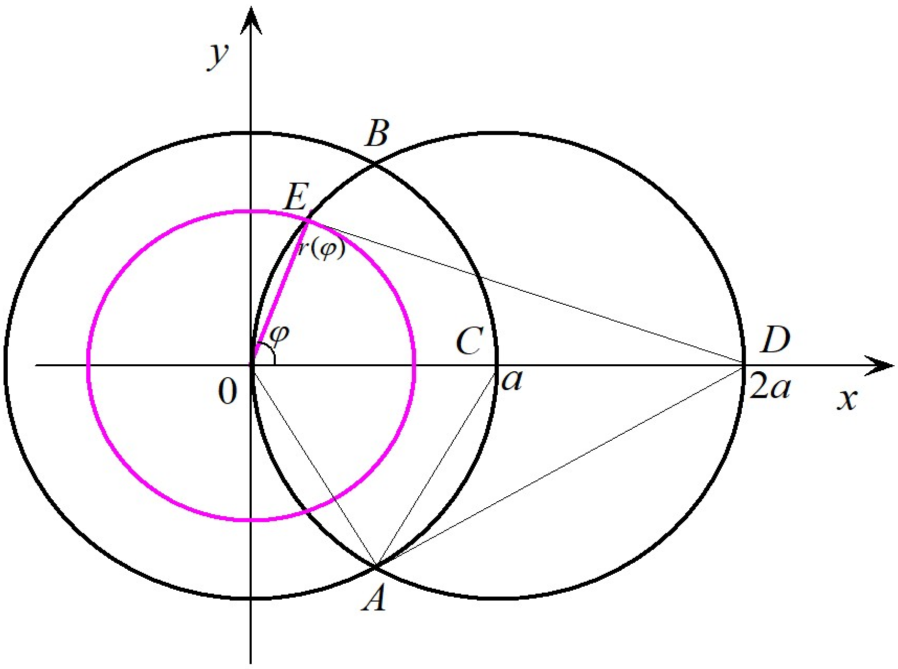
$$I=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} rdr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int\limits_0^{\varphi(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varphi(r)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi,$$

где функция $\varphi(r)$ находится из условия принадлежности точки *A* гипотенузе:

$$r\cos\varphi(r)+r\sin\varphi(r)=1 \quad\Rightarrow\quad r\sqrt{2}\sin\left(\varphi(r)+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \sin\left(\varphi(r)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{r\sqrt{2}}.$$

То есть $\varphi(r)=\arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.

В следующей задаче укажем лишь идею решения и ответ. Проверьте его самостоятельно.



Задача 4: В интеграле $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если

$$\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2, \quad a > 0, \\ x^2 + y^2 \le 2ax. \end{cases}$$

Решение: 1) Заметим, что треугольник $0AC$ правильный, а треугольник $0ED$ прямоугольный. Откуда можно получить, что $r(\varphi)=2a\cos\varphi$.

2) Область в данной задаче - сдвоенный сегмент $0BCA$. При этом область элементарна при обеих последовательностей одномерного интегрирования, но при внешней переменной φ верхняя граница состоит из трех функций, а при внешней переменной r - из одной.

Ответ: 1) если внешняя переменная последовательного интегрирования φ , то

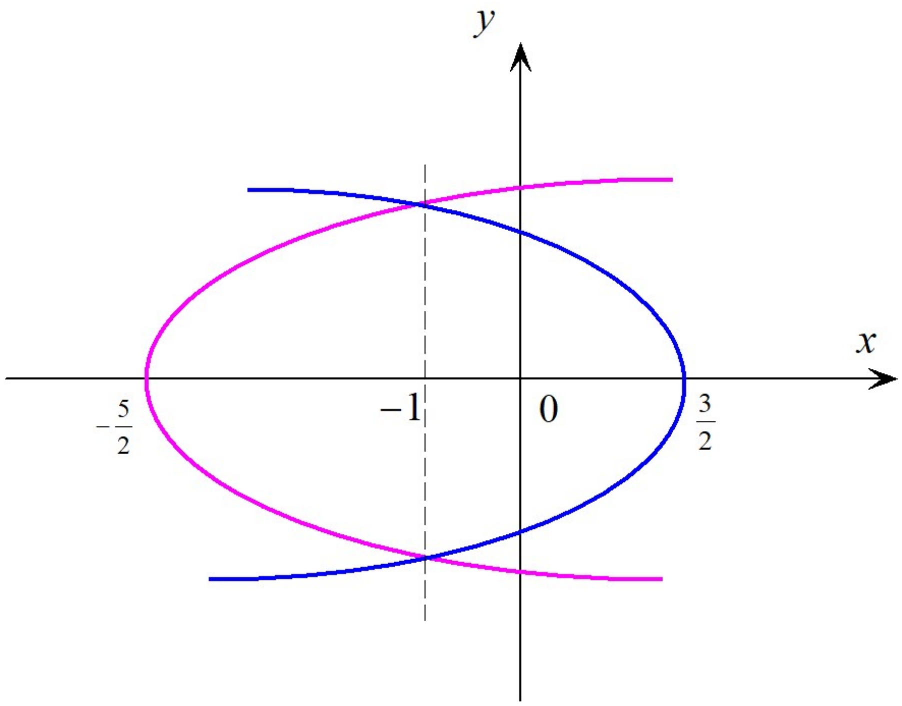
$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{a}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

2) если внешняя переменная последовательного интегрирования r , то

$$I=\int\limits_{0}^{a}rdr\int\limits_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.$$

Задача 5: На плоскости Oxy в прямоугольной системе координат найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9 - 6x$ и $y^2 = 10x + 25$.

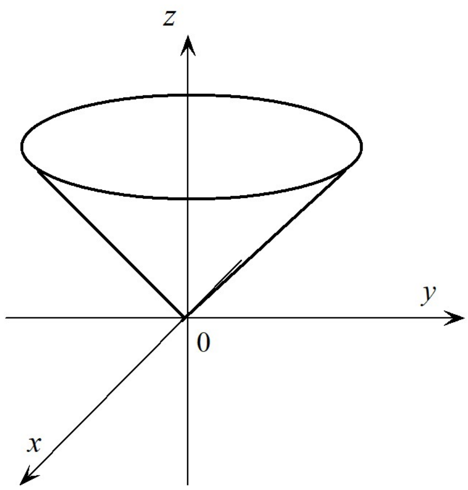


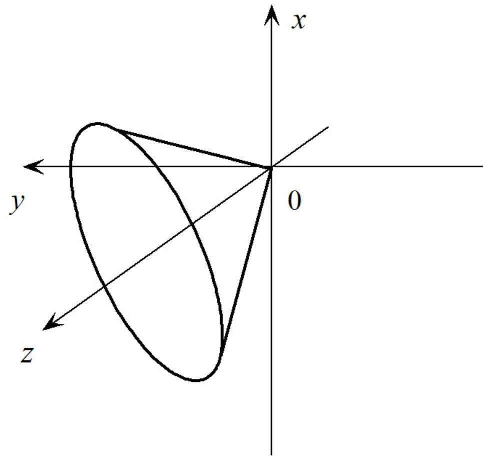
Решение: 1) Воспользуемся теоремой о том, что площадь области Ω может быть найдена по формуле $S = \iint\limits_{\Omega} dxdy$. Заметим, что координаты точек пересечения парабол $\left\| \begin{matrix} -1 \\ \pm\sqrt{15} \end{matrix} \right\|$.

2) В данном случае удобнее воспользоваться элементарностью области Ω относительно оси Ox. В этом случае имеем

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \Bigg|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dy = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

Рассмотрим теперь примеры стереометрических задач.





Задача 6: Переставить пределы повторного интегрирования в порядке $\{z, y, x\}$ для интеграла

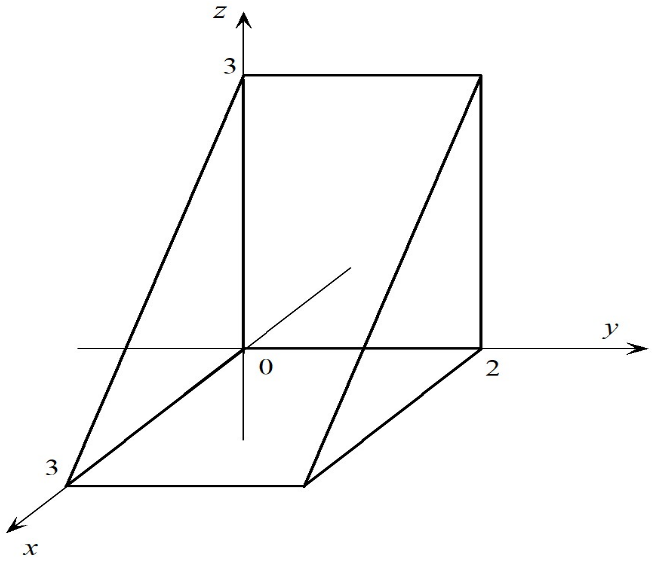
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Решение: 1) Заметим, что тело V ограничено снизу частью конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, а сверху плоскостью $z = 1$.

2) После указанного изменения порядка интегрирования, применяя к области V метод секущих плоскостей, получаем

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,.$$

Задача 7: Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где область V лежит в положительном ортанте и ограничена плоскостями $y = 2$ и $x + z = 3$.



Решение: 1) В данной задаче V есть прямая треугольная призма. Координаты точек в V удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} 0 \le z \le 3 - x, \\ 0 \le y \le 2, \\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$

2) Поэтому (проверьте результат самостоятельно)

$$I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{3-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \ln\sqrt{2} - \frac{1}{8} \ .$$

Задача 8: Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, где область V задана системой неравенств $\left\{\begin{array}{l}0\le z\le xy,\\ 0\le x+y\le 1\end{array}\right\}$.

Решение: 1) Здесь V ограничена снизу плоскостью $z=0$, а сверху фрагментом гиперболического параболоида $z=xy$, расположенным в первой четверти координатной плоскости Oxy, для которого сумма координат x и y не превосходит 1. Эскиз области V сделайте самостоятельно, в качестве упражнения.

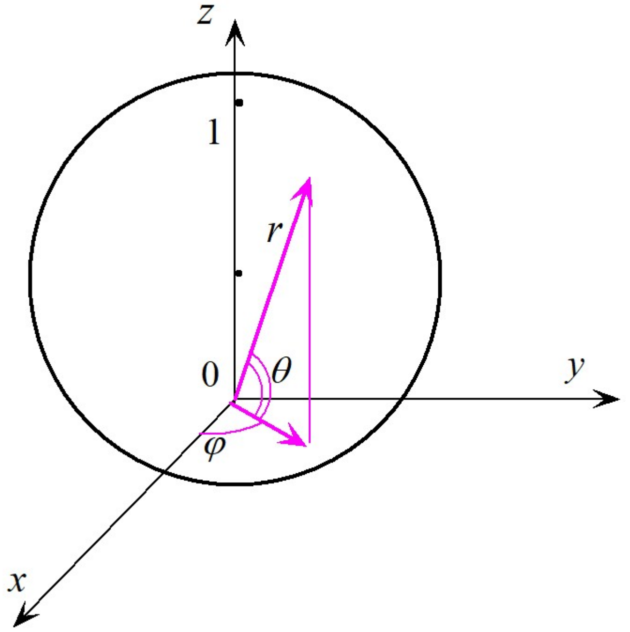
Область V элементарна относительно всех трех координатных осей, поэтому искомый интеграл сводится к повторным следующим образом

$$I=\iiint\limits_V xy\,dxdydz=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x} y\,dy\int\limits_0^{xy} dz=\int\limits_0^1 x^2\,dx\int\limits_0^{1-x} y^2\,dy=\int\limits_0^1 x^2\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{1-x}\right)dx\,.$$

Откуда получаем, что

$$I=-\frac{1}{3}\int\limits_0^1(x-1)^3x^2dx=-\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(x^5-3x^4+3x^3-x^2\right)dx=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{180}.$$

Задача 9: Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



Решение: 1) Область V есть шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right\|$, а каноническое уравнение его поверхности $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2) Перейдем в *сферическую систему координат* по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$ с модулем якобиана $|J| = r^2 \cos\theta$.

3) Поскольку на границе области V имеем $r^2 = r\sin\theta$, то здесь будет $r = \sin\theta$.

Откуда получаем, что в сферических координатах $V^* = \left\{ \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le \sin\theta. \end{array} \right\}$.

4) В итоге

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} r^3 \cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin\theta} r^3 dr = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$