ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x,y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| \in \Omega$ локальный минимум *при условии* $g(x,y)=0$. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ *условный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколотая окрестность, такая, что для *любой* точки $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ имеет место

$$g(x,y)=0$$

и выполнено неравенство

$$f(x,y) > f(x^*,y^*) . \qquad (1)$$

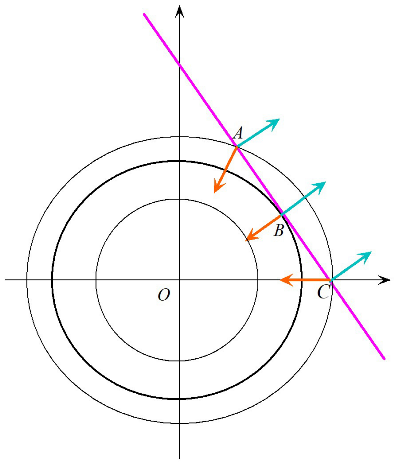
Сначала рассмотрим конкретную. задачу:

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = -x^2 - y^2$ при условии $g(x,y) = x + y - 2 = 0$.

Решение: 1) Очевидно, что эту задачу можно решить *методом исключения*, выразив y из условия связи через x и подставив $y = 2 - x$ в целевую функцию. Тогда приходим к задаче максимизации функции $\Phi(x) = -x^2 - (2-x)^2$ *без ограничений*, решение которой $x^* = 1, y^* = 1$ и $\Phi^* = f^* = -2$.

Функция Лагранжа и ее использование

Рассмотрим вначале геометрическую интерпретацию задачи, получив необходимые условия ее решения.



На данном рисунке серым (и черным) цветом показаны изолинии целевой функции

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 ,$$

фиолетовым цветом − точки прямой $g(x,y) = x + y - 2 = 0$.

Оранжевым цветом показаны градиенты *целевой функции* $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -2x \\ -2y \end{matrix} \right\|$.

Наконец, голубым цветом − градиенты *функции-ограничения* $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$.

Очевидно, что, если проекция градиента целевой функции на множество точек, удовлетворяющих ограничению, *не нулевая*, то это − не экстремум и *необходимое* условие экстремума заключается в коллинеарности векторов $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{matrix}\right\|$ на множестве точек $g(x,y)=x+y-2=0$.

Иначе говоря, $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\| = -\lambda \left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{matrix}\right\|$ или, в векторной форме, $\operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g = o$, где λ − некоторая константа.

Откуда, в силу свойства линейности операции дифференцирования, следует, что существует функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y),$$

в терминах которой необходимое условие существования условного экстремума в данной задаче принимает вид:

$$\begin{cases} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче $L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 2)$. Значит, необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} -2x + \lambda = 0, \\ -2y + \lambda = 0, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Очевидным решением этой системы является тройка чисел

$$x^* = 1, \;\; y^* = 1, \;\; \lambda^* = 2, \quad f^* = -2 .$$

Сделаем обобщение данного подхода

Для задачи:

исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (2)
при условиях: $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]$.

будем считать, что

$$m < n \quad \text{и} \quad \operatorname{rg}\left\| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_m)} \right\| = m .$$

Функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $i = [1, m]$ − непрерывно дифференцируемые.

Если ввести в рассмотрение функцию *Лагранжа* вида:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

то *необходимые* условия экстремума функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, при условиях

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \quad i=[1,m].$$

будут иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=0 & j=[1,n] \\ g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 & i=[1,m]. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*$ удовлетворяют (3). Тогда *достаточное* условие экстремума будет иметь формулировку

> Если квадратичная форма $d_x^2 L$ положительно (отрицательно) определена при условии $dg_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \quad i = [1, m]$, то задача (3) в точке $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*$ имеет локальный *минимум* (*максимум*).

Пример 2. В E^3 исследовать на экстремум функцию $u(x,y,z) = x - y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

Решение: 1) Функция Лагранжа для этой задачи будет

$$L = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)\,.$$

Условия ее стационарности вместе с уравнением связи образуют систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2 + 4\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16. \end{cases}$$

Если из первых трех уравнений выразить $x=-\frac{1}{2\lambda}, y=\frac{1}{2\lambda}, z=-\frac{1}{2\lambda}$ и подставить в четвертое, то получим из $\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{4\lambda^2}=16$, что $\lambda=\pm\frac{1}{4}$.

2) Получаем две стационарные точки, подозрительные на экстремум:

$$\lambda^*=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^*=-2 \\ y^*=\ \ 2 \\ z^*=-2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda^*=-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^*=\ \ 2 \\ y^*=-2 \\ z^*=\ \ 2 \end{cases}$$

3) Проверяем достаточные условия. Находим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 4\lambda$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0$$

Откуда $d^2 L = 2\lambda (dx)^2 + 2\lambda (dy)^2 + 4\lambda (dz)^2$. Эта квадратичная форма положительно определена при $\lambda = \frac{1}{4}$ и отрицательно определена при $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Кроме того, должно выполняться равенство $2xdx + 2ydy + 4zdz = 0$. Однако, последнее равенство на знаковую определенность $d^2 L$ не повлияет и может быть проигнорировано. Итак

$$\lambda_1^* = \frac{1}{4} \quad \begin{cases} x_1^* = -2 \\ y_1^* = 2 \\ z_1^* = -2 \end{cases} \quad f_1^* = -8 \quad - \text{точка } \textit{минимума}$$

и

$$\lambda_2^* = -\frac{1}{4} \quad \begin{cases} x_2^* = 2 \\ y_2^* = -2 \\ z_2^* = 2 \end{cases} \quad f_2^* = 8 \text{ ....–.точка } \textit{максимума}.$$

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x,y)=x^2+xy+y^2$ при условии $x^2+y^2=1$.

Решение: 1) Функция Лагранжа в этой задаче

$$L=x^2+xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1).$$

2) Условия ее стационарности будут

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2y+2\lambda y=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(2+2\lambda)x+y=0\\ x+(2+2\lambda)y=0\end{cases} \qquad (4)$$

2) Имеем (по теореме Крамера), что, если $\det\begin{Vmatrix}2+2\lambda & 1\\ 1 & 2+2\lambda\end{Vmatrix}\neq 0$, то $x=y=0$, а это очевидно (в силу $x^2+y^2=1$) не решение.

Если же $\det\begin{Vmatrix}2+2\lambda & 1\\ 1 & 2+2\lambda\end{Vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=-\dfrac{1}{2}\\ \lambda_2=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$, то возможны два случая.

3) $\lambda_1^* = -\frac{1}{2}$, при этом, в силу (4)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x_{11}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{11}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & - \text{точка } D \\ \begin{cases} x_{12}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{12}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & - \text{точка } C \end{array} \right. .$$

Матрица Гессе функции Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} 2 + 2\lambda_1^* & 1 \\ 1 & 2 + 2\lambda_1^* \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Она *положительно полуопределена* и тут требуется дополнительное исследование.

Здесь, в точках C и D,

$$d^2 L = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx + dy)^2 \ ,$$

при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0.$

А поскольку в этих точках $x = -y$, то $dy = dx$. Значит, $d^2 L = 4(dx)^2$ и точки C и D − это *минимумы* с $f^* = \frac{1}{2}$.

4) $\lambda_2^* = -\frac{3}{2}$, при этом (в силу (4))

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_{21}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{21}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} - \text{точка } A \\ \begin{cases} x_{22}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{22}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} - \text{точка } B \end{array} \right. .$$

Матрица Гессе тут будет иметь вид $\left\| \begin{matrix} 2+2\lambda_2^* & 1 \\ 1 & 2+2\lambda_2^* \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\|$.

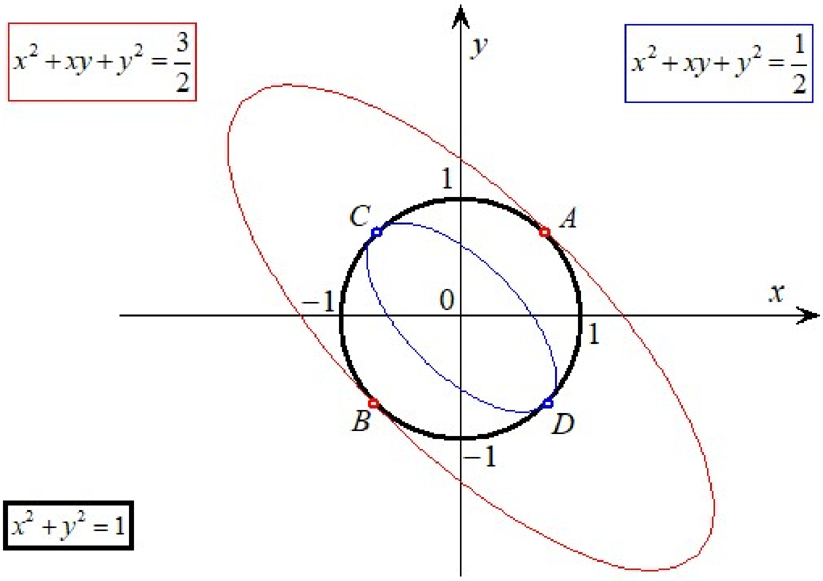
Она *отрицательно полуопределена* и здесь также требуется дополнительное исследование.

Имеем, в точках A и B,

$$d^2L = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2 \ ,$$

при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0.$

А поскольку в этих точках $x = y$, то $dx = -dy$. Значит, $d^2L = -4(dx)^2$ и точки A и B– это *максимумы* с $f^* = \frac{3}{2}$.


$x^2+xy+y^2=\frac{3}{2}$
$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$
$x^2+y^2=1$
y
x
1
−1
0
1
−1
A
B
C
D