ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ и *n*-мерная вектор-функция $\vec{x}(t)$, где $t \in [a,b] \subset R$. Все рассматриваемые функции будем считать непрерывно дифференцируемыми. Тогда *полная* производная функция от *сложной* (композиции) функции одной переменной $\Phi(t) = F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)$ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \tag{1}$$

Пусть независимых переменных больше, чем одна, тогда

$$\Phi(\vec{t}\,) = F[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k), t_1, t_2, \ldots, t_k]$$

И справедлива формула, обобщающая (1). Чтобы эту производную не путать с *частной* производной от функции, не являющейся композицией, обычно пишут так

$$\Phi'_{t_p} = \frac{\partial F}{\partial t_p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_p} \qquad \forall p \in [1,k]. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) применимы в самом простом случае, когда формульное представление функций $F(\ldots)$ и $\vec{x}(\ldots)$ известно. Однако часто оказывается, что эти функции заданы *неявно*: скажем, как решения некоторых других задач.

Пусть требуется найти все частные производные для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, значения которых для конкретной пары аргументов x и y находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} F(u,v,x,y)=0, \\ G(u,v,x,y)=0 \end{cases} \text{ или, более точно, } \begin{cases} F(u(x,y),v(x,y),x,y)=0, \\ G(u(x,y),v(x,y),x,y)=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Применив формулу (2), т.е. продифференцировав последовательно по x и y каждое из уравнений системы (3), получим две системы уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\,, \\ \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial y}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что при фиксированных x и y величины $u, v, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial G}{\partial y}$ существуют.

Тогда системы уравнений (4) будут линейными относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Заметим также, что, несмотря на линейность и совпадения вида основных матриц в системах (4), наибольшее затруднение представляет не их решение, а их составление, которое требует предварительного решения нелинейной системы (3).

Что касается *свойств* функций, заданных неявно, то напомним, что условие *локального* их существования и дифференцируемости, дает теорема *о системе неявно заданных функций*. Приведем ее формулировку.

Пусть функции $F_i\left(u_1,\ldots,u_m,x_1,\ldots,x_n\right) \quad \forall i=[1,m]$
непрерывно дифференцируемы *в некоторой окрестности точки* $\left\{u^*,x^*\right\}$.
Тогда, если

1) $F_i\left(u^*,x^*\right)=0 \quad \forall i=[1,m]$,

2) *в точке* $\left\{u^*,x^*\right\}$ *якобиан* $\dfrac{\partial\left(F_1,\ldots,F_m\right)}{\partial\left(u_1,\ldots,u_m\right)}\neq 0$,

то найдутся окрестности точек u^* *и* x^*, *в которых* ***будут существовать*** *непрерывно дифференцируемые функции* $\bar{u}(x)$,
являющиеся в этих окрестностях решением системы уравнений

$$F_i\left(\bar{u}(x),x\right)=0 \quad \forall i=[1,m].$$

Напомним, что якобиан $\dfrac{\partial\left(F_1,\ldots,F_m\right)}{\partial\left(u_1,\ldots,u_m\right)}=\det\left\|\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{matrix}\right\|$.

Проиллюстрируем использование формул (1) ... (4) следующими примерами.

Пример 1. Найти частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{v+1} = 2x, \end{cases}$$

в точке $\{1;2\}$ для которой выполнены равенства

$$u(1,2) = v(1,2) = 0. \tag{5}$$

Решение: В данной задаче для системы (3) имеем

$$\begin{cases} F(u,v,x,y) = xe^{u+v} + 2uv - 1, \\ G(u,v,x,y) = ye^{u-v} - \dfrac{u}{v+1} - 2x. \end{cases}$$

Решать систему (3) здесь не нужно, ибо легко проверяется, что верны равенства $F(0,0,1,2) = 0$ и $G(0,0,1,2) = 0$.

Поэтому в точке $\{1;2\}$ в силу (5) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = xe^{u+v} + 2v = 1e^0 + 0 = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = xe^{u+v} + 2u = 1e^0 + 0 = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{u+v} = 1e^0 = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = ye^{u-v} - \frac{1}{v+1} = 2e^0 - \frac{1}{0+1} = 1,$$
$$\frac{\partial G}{\partial v} = -ye^{u-v} + \frac{u}{(v+1)^2} = -2e^0 + \frac{0}{(0+1)^2} = -2,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = e^{u-v} = e^0 = 1.$$

А системы (4) будут $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - 2\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1. \end{cases}$

Из них, получим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{3},$ что и является решением задачи.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Пример 1. Найти $dz(x,y)$, если $z = u^3 + v^3 \quad u \neq v$, а функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяются системой уравнений $\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y. \end{cases}$. (6)

Решение: 1) Искомый дифференциал имеет вид $dz(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, поэтому задача сводится к нахождению двух частных производных, которые здесь могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2) Производные $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 3u^2$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$ находятся тривиально, а для вычисления остальных четырех придется использовать системы (3) и (4).
Нелинейная система (3) вида

$$\begin{cases} F(u,v,x,y) = u + v - x = 0, \\ G(u,v,x,y) = u^2 + v^2 - y = 0\ , \end{cases}$$

несложно решается "школьными" методами, но тут удобнее составить две линейные системы (4). Проверьте самостоятельно, что они имеют следующий вид и решения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1\ , \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{v}{v-u} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{u}{u-v} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\ , \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2(u-v)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{2(u-v)} \end{array} .$$

3) Таким образом, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2\,\frac{v}{v-u} + 3v^2\,\frac{u}{u-v} = -3uv\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2\,\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\,\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

4) Заметим, что из (6) следует, что $u+v=x$ и $uv=\dfrac{x^2-y}{2}$, что позволяет искомые производные записать как функции от x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}(x^2-y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x\,.$$

Поэтому окончательно получаем, что $dz(x,y) = \dfrac{3}{2}(y-x^2)\,dx + \dfrac{3}{2}x\,dy$.

5) К полученному ответу следует добавить условие, гарантирующее разрешимость системы (6).

Это условие можно получить разными способами: из геометрической интерпретации системы (6) в прямоугольной системе координат Ouv или из следующих соотношений:

$$0 \le (u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv = y - 2\frac{x^2 - y}{2} = 2y - x^2,$$

что с учетом $u \ne v$ дает $y > \dfrac{x^2}{2}$.

Возникает естественный вопрос: можно ли *за счет выбора* специальной системы координат (не обязательно декартовой) *упростить* вид дифференциального уравнения?

Пример 2. Найти все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие во внутренности правой декартовой координатной полуплоскости, уравнению вида

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1. \tag{7}$$

Решение: 1) Преобразуем уравнение (7), перейдя в полярную систему координат, то есть, сделав замену переменных $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, обратная к которой

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Заметим, что данные формулы корректны, поскольку по условию $x>0$.

2) Формулы, выражающие декартовы переменные через полярные (и наоборот) у нас есть. Нужно получить в полярных координатах формулы для $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Имеем по правилу (2) дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Составим системы (4) с $F(r,\varphi,x,y)=r\cos\varphi-x$ и $G(r,\varphi,x,y)=r\sin\varphi-y$ для производных по x и y и решим их:

$$\begin{cases} \cos\varphi\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+r(-\sin\varphi)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=1\,, \\ \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=-\dfrac{1}{r}\sin\varphi \end{array}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+r(-\sin\varphi)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\,, \\ \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=\dfrac{1}{r}\cos\varphi \end{array}.$$

3) Подставляем найденные выражения в полярных координатах в левую часть уравнения (7), получаем

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=r\cos\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)\right]+r\sin\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right]=$$

$$=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\frac{\partial u}{\partial r}+(-\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}\,.$$

4) В итоге исходное уравнение, учетом условия $x>0$, будет равносильно уравнению $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}$, которое проще исходного.

Решение данного уравнения означает, что мы должны найти все непрерывно дифференцируемые функции $u(r,\varphi)$, частная производная от которых по r равна $\frac{1}{r}$.

Исходя из известных правил дифференцирования, можно заключить, что

$$u(r,\varphi) = \ln r + C(\varphi), \quad \text{где } C(\varphi),$$

есть *произвольная,* непрерывно дифференцируемая функция *одного* аргумента φ.

5) Решение исходной задачи получаем, сделав обратный переход к переменным: $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$, а, учитывая условие $x>0$ и непрерывность суперпозиции непрерывных функций, эту формулу можно записать в виде:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+D\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $D(s)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.