Автономные системы уравнений и их свойства

Определение 1.1	*Нормальной автономной системой* дифференциальных уравнений порядка $n \geq 2$ с неизвестной вектор-функцией $x(t) \quad t \in T$ называется система уравнений вида $$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x \in \Omega \subseteq E^n\,, \qquad (1.1)$$ где вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы 4.3.1 (Коши) на множестве Ω за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что любая система вида $\dot{x} = F(t, x)$ может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной $x_{n+1}(t) = t$. Координатная форма системы (1.1)в этом случае пополняется $(n+1)$-м уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$ и принимает автономный вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = F_k(x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall\, k = [1, n] \,, \\ \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \,. \end{array} \right.$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принято называть *фазовыми переменными.*

Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (1.1), тогда вектор-функция $x(t),\ t \in T$ параметрически задает некоторую линию в E^n, называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (1.1).

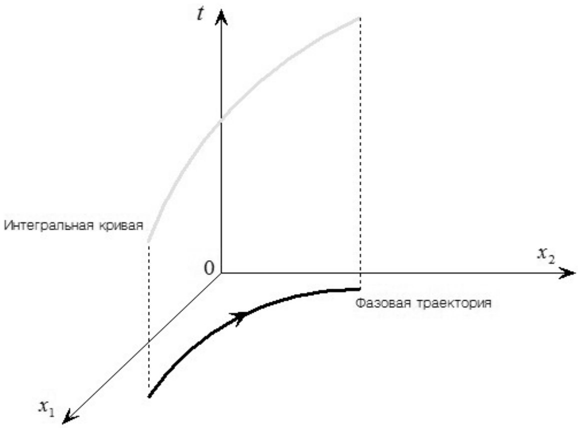

Рис. 1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании переменной t.

Пример 1.1 : для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1\,, \end{cases}$$

каждая интегральная кривая есть в $E^3\{\,t, x_1, x_2\}$ винтовая (или прямая при $C_1 = 0$) линия

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(t + C_2), \end{cases}$$

в то время как фазовые траектории являются в $E^2\{x_1, x_2\}$ окружностями (или точкой при $C_1 = 0$) вида $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$. Причем для каждой фазовой траектории с конкретным значением C_1 имеется бесконечно много интегральных кривых с различными значениями C_2.

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

Теорема 1.1 **Если вектор-функция $x(t)$ есть решение автономной системы (1.1) при $t \in T$, то вектор-функция $x(t+c)$ (где c такая константа, что $t+c \in T$) также является решением системы (1.1) при всех допустимых t.**

Доказательство.

Следует непосредственно из равенств

$$\frac{dx(t+c)}{dt} = \frac{dx(t+c)}{d(t+c)} = F(x(t+c)) \ .$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2 **Если фазовые траектории решений $x(t)$, $t \in T_1$ и $y(t)$, $t \in T_2$ автономной системы (1.1) имеют общую точку $b = x(t_1) = y(t_2)$, то $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$ для всех t, при которых определены обе части последнего тождества.**

Доказательство.

Вектор-функция $z(t) = x(t + t_1 - t_2)$ в силу теоремы 1.1 является решением системы (1.1) для всех t таких, что

$$t + t_1 - t_2 \in T_1.$$

Кроме того,

$$z(t_2) = x(t_1) = b = y(t_2)\,.$$

Тогда по теореме единственности $z(t) \equiv y(t)$ для всех t, при которых обе части этого тождества определены.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 1.2 означает, что фазовые траектории автономных систем в окрестности точек, для которых выполняется теорема Коши, либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Поэтому вектор-функцию $F(x)$ можно рассматривать в области Ω как задающую векторное поле *фазовых скоростей*, каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку $x \in \Omega$. Для точек с нулевой фазовой скоростью используется

Определение 1.2	*Положением равновесия* или *точкой покоя* системы (1.1) называется ее решение вида $$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in T$$ такое, что $F(x_0) = o$.

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве E^n, а соответствующая этому решению интегральная кривая в E^{n+1} есть прямая, параллельная оси Ot. Из определения 1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (1.1) сводится к решению недифференциальной системы уравнений $F(x_0) = o$.

Наконец, из вышесказанного следует, что *неособое решение* не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных t. Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

Теорема 1.3 **Пусть $x(t),\ t \in T$ – неособое решение системы (1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда $x(t)$ – периодическая функция.**

Из теорем 1.1– 1.3 вытекает

Следствие 1.1 **Каждая фазовая траектория автономной системы (1.1) является либо точкой, либо незамкнутой линией или замкнутой линией без самопересечений.**

Групповое свойство автономной системы (1.1) описывает

Теорема 1.4 **Пусть $x(t, a)$ есть решение задачи Коши следующего вида $\dot{x} = F(x),\ x(0) = a$. Тогда**

$$x(t, x(t_0, a)) \equiv x(t + t_0, a)$$

для любых допустимых t и t_0.

Доказательство.

Вектор-функции $x(t, x(t_0, a))$ и $x(t + t_0, a)$ при $t = 0$ равны вектору $x(t_0, a)$. По теореме единственности они совпадают для всех допустимых значений t и t_0.

Теорема доказана.

Следует отметить, что исследование поведения фазовых траекторий системы (1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства *единообразно* выполнить удается, вообще говоря, не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия. Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем.

Пусть формулы $x = \varphi(y)\ \ \forall\, y \in \Theta \subset E^n$, $x \in \Omega \subset E^n$ задают замену переменных $\{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,\}$ на $\{\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,\}$. Напомним

Определение 1.3	Замена переменных $x = g(y)$ называется *гладкой обратимой* в Θ, если 1°. Преобразование $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает Θ в Ω; 2°. Вектор-функции $x = g(y)$ и, обратная к ней $y = g^{-1}(x) = h(x)$, непрерывно дифференцируемы на множествах Θ и Ω соответственно; 3°. Якобиан $$\frac{\partial\,(\,x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\,)}{\partial\,(\,y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\,)} \neq 0 \quad \forall y \in \Theta\,.$$

Будет справедлива

Теорема 1.5 (О выпрямлении траекторий) **В малой окрестности точки $a \in \Omega \subseteq E^n$, не являющейся положением равновесия, система (1.1) может быть приведена к виду**

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

некоторой гладкой обратимой заменой $x = g(y)$.

Отметим, что

1°. Система (1.1) в переменных $\{\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,\}$ легко интегрируется. Ее фазовые траектории суть отрезки прямых

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_1\,, \\ y_2(u) & = & a_2\,, \\ & \ldots & \\ y_{n-1}(u) & = & a_{n-1}\,, \\ y_n(u) & = & u + C\,, \end{array} \right.$$

что оправдывает название теоремы.

2°. Практическое значение теоремы 1.5 ограничено тем обстоятельством, что замена (1.7) для каждой точки a своя. Иначе говоря, построить эту замену единообразно для *немалого* множества Ω удается лишь исключительных случаях.

Устойчивость положения равновесия автономной системы

Было отмечено, что достижение особых точек при движении по фазовым траекториям возможно лишь при $t \to \infty$. Это означает, что изучение поведения решений системы (1.1) в окрестностях таких точек требует исследования их поведения при $t \to \infty$.

Одним из самых важных пунктов этого исследования является ответ на вопрос: в каких случаях малые изменения начальных условий для системы (1.1) приводят к малым изменениям решений на полубесконечных интервалах $(-\infty, \underline{\Delta})$ и $(\overline{\Delta}, +\infty)$.

Пусть $x(t,a)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x)\,, \quad x(t_0) = a \in \Omega\,, \tag{2.1}$$

такое, что $x(t,a)\quad \forall t \in T$ целиком находится в некоторой окрестности x_0 – положения равновесия (особого решения) системы (1.1), т.е. точки, для которой $F(x_0) = o$.

Дадим следующие определения:

Определение 2.1	Положение равновесия x_0 называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если 1°. Найдется $\Delta > 0$ такое, что решение $x(t,a)$ задачи (2.1) существует на T для любых a таких, что $\|\,a - x_0\| < \Delta$. 2°. $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ такое, что, если $$\|\,a - x_0\| < \delta_\varepsilon,$$ то $\|\,x(t,a) - x_0\,\| < \varepsilon \quad \forall\,t \in T.$ Иначе положение равновесия будем называть *неустойчивым.*

Определение 2.2	Положение равновесия x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если 1°. Оно устойчиво по Ляпунову. 2°. При достаточно малых $\mid a - x_0 \mid$ $$\lim_{t\to\infty} x(t,a) = x_0.$$

Для данных определений сделаем следующие замечания.

Во-первых, мы рассматриваем устойчивость по отношению лишь к *малым* отклонениям от положений равновесия.

Во-вторых, использование одних лишь определений 2.1 и 2.2 для исследования устойчивости эффективно в тех случаях, когда возможно либо построение общего решения, либо выявление таких свойств решений, как ограниченность, возрастание или убывание.

Следует также обратить внимание, что пункты 1° и 2° в определении 2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°. Эту особенность определения 2.2 иллюстрируют пример 1.1 и

Пример 2.1 Устойчиво ли нулевое решение уравнения $\dot{x} = -x^2$?

Решение. Очевидно, что $x(t) = 0$ есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t+C},$$

где C – произвольная константа.

Заметим, что хотя $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при $t = -C$ интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту и $\forall C < 0$ из условия $|x(0)| < \delta$ условие $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in (0, +\infty)$ следовать не будет.

Решение получено.

Рассмотрим теперь проблему устойчивости положений равновесия для систем (1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \; , \tag{2.2}$$

$$\text{где} \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| \; .$$

Здесь числа a_{ij} – комплексные константы.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное преобразование в унитарном пространстве U^n, имеющее собственные значения λ_1, λ_2, $\dots$ λ_n, среди которых, быть может, имеются равные.

Тогда для положения равновесия $x(t) = o$ справедлива

Теорема 2.1

1°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall j = [1, n]$, **то** $x(t) = o$ **асимптотически устойчиво.**

2°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j \leq 0 \ \ \forall j = [1, n]$ **и для каждого** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ **его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **устойчиво по Ляпунову.**

3°. Если имеется хотя бы одно λ **с** $\mathrm{Re}\lambda > 0$ **или хотя бы для одного** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda = 0$ **кратность больше размерности собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **неустойчиво.**

Заметим, что хотя теорема 2.1 сформулирована и доказана как набор достаточных условий, несложно убедиться, что эти условия одновременно являются и необходимыми.

Вернемся теперь к рассмотрению системы (2.1) в предположении, что $x_0 = o$ является ее положением равновесия, то есть $F(o) = o$. Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость.

Первый подход носит название исследования *устойчивости по линейному приближению* и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x_0 = o$. Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в неразвернутом матричном виде как

$$\|F(x)\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,,$$

где матрица $\|A\|$ имеет элементы α_{ij} такие, что $\alpha_{ij} = \left.\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x=o}$, а вектор-функция $R(x)$ не только равна o при $x = o$, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to o} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0 \,, \qquad \text{где} \quad |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \,.$$

Тогда система уравнений (2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \;, \tag{2.4}$$

и оказывается справедливой

Теорема 2.2 (Об устойчивости по линейному приближению)

1°. Если $\|A\|$ – матрица системы (2.4) такова, что $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall\, j$, то решение этой системы $x(t) = o$ асимптотически устойчиво.

2°. Если матрица $\|A\|$ имеет хотя бы одно λ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то решение системы (2.4) $x(t) = o$ неустойчиво.

3°. Если $\max\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j = 0$, то устойчивость (или неустойчивость) $x(t) = o$ зависит не только от матрицы $\|A\|$, но и от вектор-функции $R(x)$.

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для того, чтобы делать заключения об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия $x = o$ системы (2.4). Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия.*

Положения равновесия, для которых оказываются справедливыми условия пункта 3°, называются *негрубыми положениями равновесия.* Исследование особых решений в этом случае можно попытаться выполнить альтернативным методом, разработанным А.М. Ляпуновым, основой которого служат следующие определения и теоремы.

Определение 2.3	Функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(o) = 0$, называется в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ – *положительно определенной*, если $\Phi(x) > 0 \;\; \forall x \in \dot{U}$; – *отрицательно определенной*, если $\Phi(x) < 0 \;\; \forall x \in \dot{U}$; – *неотрицательной*, если $\Phi(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \dot{U}$; – *неположительной*, если $\Phi(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \dot{U}$.

Определение 2.4	*Производной в силу системы* (2.1) *от функции* $\Phi(x)$ называется выражение $$\dot{\Phi}(x) = \|\operatorname{grad}\Phi(x)\|^{\mathrm{T}}\,\|F(x)\| =$$ $$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j}F_j(x)\,.$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы (2.1) есть полная производная по t от сложной функции $\Phi(x(t))$, если $x(t)$ – решение этой системы. При этом в произвольной точке x для вычисления значений производной в силу системы решать саму систему не требуется.

Определение 2.5	Положительно определенная в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ функция $V(x)$ называется *функцией А.М. Ляпунова*, если $$\dot{V}(x) \le 0 \quad \forall x \in \dot{U}\,,$$ где $\dot{V}(x)$ – производная в силу системы (2.4).

Исследование системы (2.1) по методу Ляпунова базируется на следующих трех теоремах.

Теорема 2.3 (Ляпунова об устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (2.1) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.**

Другими словами, согласно теореме 2.3, неположительность производной в силу системы (2.4) от функции Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия.

Теорема 2.4 (Об асимптотической устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (2.1) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что ее производная в силу системы (2.1) $\grave{V}(x)$ отрицательно определена в этой окрестности, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.**

Доказательство неустойчивости положения равновесия может основываться на использовании специальной функции $W(x)$, называемой *функцией Н.Г. Четаева.*

Пусть U некоторая окрестность $x = o$, а $\Omega \subset U$ такая, что $x = o$ – граничная точка Ω.

Теорема 2.5 (Четаева о неустойчивости)

Если существует функция $W(x)$ непрерывно дифференцируемая на Ω такая, что

$$W(x) > 0\,,\ \ \grave{W}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega\,,$$

где $\grave{W}(x)$ производная в силу системы, и все точки $x^* \in \Omega$, в которых $W(x^*) = 0$, суть граничные точки Ω.
Тогда положение равновесия $x = o$ неустойчиво.

Как уже отмечалось ранее, условия сформулированные в теоремах 2.3– 2.5 позволяют делать заключения о типе устойчивости негрубых положений равновесия, когда теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. При этом важно, что решения системы (2.4) для получения этих заключений, находить не требуется.

С другой стороны, общей методики построения функций $V(x)$ и $W(x)$ не имеется, и для этой цели приходится использовать специфику решаемой задачи. Например, доказано, что функция Ляпунова всегда существует в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия. Однако в более общем случае такие функции имеются не для любого класса систем дифференциальных уравнений.

Особенности практического применения методов Ляпунова и Четаева проиллюстрируем на примере решения двух следующих задач.

Задача 2.2 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^2\,, \\ \dot{x}_2 = -x_1^5 - x_1 x_2\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решение. 1°. У данной системы единственное положение равновесия – начало координат. Матрица $\|A\|$ в начале координат очевидно нулевая и теорема 2.2 здесь не применима.

2°. Покажем, что функция $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Действительно, она положительно определенная в любой окрестности начала координат и $V(0,0) = 0$.

Ее производная в силу системы (2.5) равна

$$\grave{V}(x_1, x_2) = 2x_1\left(-x_1^3 + x_2^2\right) + 2x_2\left(-x_2^5 - x_1 x_2\right) =$$

$$= -2x_1^4 - 2x_2^6$$

и является отрицательно определенной в любой окрестности начала координат.

Решение получено. Тогда по теореме 2.4 $x = o$ есть асимптотически устойчивое положение равновесия для системы (2.5).

Задача 2.3 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1^2 + 2x_2^5 \, , \\ \dot{x}_2 & = & x_1 x_2^2 \, . \end{array} \right. \tag{2.6}$$

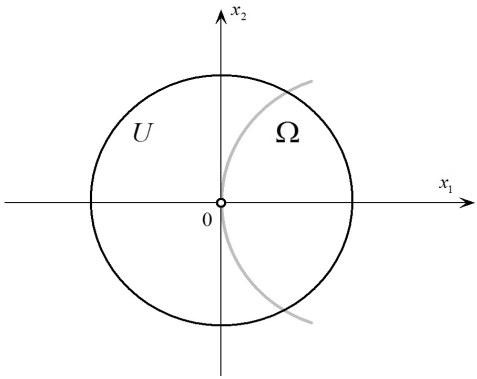

Рис. 2. К решению задачи 2.2

`Решение.`

1°. У системы (2.6) начало координат единственное положение равновесия. Матрица $\|A\|$ также нулевая и потому теорема 2.2 не применима.

2°. Пусть
$$U = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\},$$
$$\text{а } \ \Omega = \{(x_1; x_2) \in U : \, x_1 > \, x_2^2\} \, .$$

Покажем, что функция $W(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ удовлетворяет в Ω условиям теоремы 2.5. Действительно, здесь она положительно определенная и $W(0, 0) = 0$. (см. рис. 2).

Ее производная в силу системы (2.6)
$$\grave{W}(x_1, x_2) = 2x_1 \left(x_1^2 + 2x_2^5\right) - 4x_2^3 x_1 x_2^2 = 2x_1^3$$
является положительно определенной в Ω, а начало координат есть единственная точка, в которой $\grave{W}(x_1, x_2) = 0$.

Тогда по теореме 2.5 получаем, что начало координат есть неустойчивое положение равновесия для системы (2.6).

`Решение получено.`