

Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление, или метод Хевисайда, является одним из наиболее эффективных методов решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами. Приведем его краткое описание.

Определение

1.

Оригиналом называется функция $f(t)$ такая, что

1° $f(t) \equiv 0 \forall t < 0$ и непрерывна при $t \geq 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек;

2° для $f(t)$ существуют константы $M > 0$ и $\mu \geq 0$ такие, что

$$|f(t)| \leq Me^{\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Определение
2.

Функция $F(p)$ (зависящая от комплексной переменной p) вида

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1)$$

называется *изображением* функции $f(t)$ или же *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$, что кратко записывается как $f(t) \doteq F(p)$.

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в виде следующего набора утверждений.

Лемма 1. В условиях определения 1 несобственный интеграл (1) очевидно сходится в комплексной плоскости $\operatorname{Re} p > \mu$.

Лемма 2. Несобственный интеграл (1) является в области своего существования бесконечно дифференцируемой функцией.

Теорема 1. Преобразование Лапласа линейно.

Теорема 2. Пусть $f^{(m)}(t) \forall m = 0, 1, 2, \dots, k$ — оригиналы, тогда

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \dots - p f^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0).$$

Теорема 3. Для любого $s > 0$ $f(t-s) \doteq e^{-ps} F(p)$.

Из определения 2 следует, что изображение для каждого оригинала существует и единственно. При этом естественно возникает вопрос: всегда ли по изображению можно восстановить оригинал? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрывов, и определяется формулой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_{c-iw}^{c+iw} e^{tp} F(p) dp. \quad (2)$$

В формуле (2) интеграл берется на комплексной плоскости по любой прямой $\operatorname{Re} z = c > \mu$.

Рассмотрим теперь применение операционного исчисления для решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t) \quad (3)$$

(или $L(\widehat{D})y(t) = b(t)$) с комплексными постоянными коэффициентами в случае, когда $b(t)$ есть квазимногочлен при $t \geq 0$. Начальные условия будем считать известными:

$$y(+0) = C_1, y'(+0) = C_2, y''(+0) = C_3, \dots, y^{(n-1)}(+0) = C_n. \quad (4)$$

Согласно теоремам 1 и 2, $y(t)$ — каждое решение этого уравнения для неотрицательных t — также есть квазимногочлен.

Доопределим значения функций $b(t)$ и $y(t)$ тождественными нулями при $t < 0$. Тогда эти функции являются некоторыми оригиналами, поскольку пункт 2° определения 1 выполняется для квазимногочленов очевидным образом.

Пусть $b(t) \doteq B(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$. Применяя преобразование Лапласа (в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \mu$, то есть в которой оно существует) к обеим частям уравнения (3) и учитывая условия (4), в силу теоремы 2 получаем

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) - H(p) = B(p)$$

или

$$L(p)Y(p) - H(p) = B(p), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} H(p) = & p^{n-1}C_1 + p^{n-2}C_2 + \dots + pC_{n-1} + C_n + \\ & + a_1(p^{n-2}C_1 + p^{n-3}C_2 + \dots + pC_{n-2} + C_{n-1}) + \dots + a_{n-1}C_1. \end{aligned}$$

Уравнение (5) относительно $Y(p)$ линейное и алгебраическое. Его решение при $\operatorname{Re} p > \mu$ есть

$$Y(p) = \frac{B(p) + H(p)}{L(p)}.$$

Хотя оригинал $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$ можно получить при помощи формулы (2), на практике удобнее поступить иначе.

Можно воспользоваться взаимной однозначностью связи оригиналов и отображений, допускающей «подбор» решений при помощи специальной табл. 1, основой которой служат

Лемма 3. Для каждого целого неотрицательного k справедливо равенство

$$t^k e^{\lambda t} \doteq \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}.$$

Содержимое табл. 1 получается из формулы, данной в лемме 3, и формулы Эйлера $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.

Кроме того, функция $Y(p)$ дробно-рациональная, то есть, она всегда может быть разложена на простейшие дроби, подобные представленным в табл. 1.

Наконец, линейность преобразования Лапласа и взаимная однозначность сопоставления оригинала и изображения позволяют находить решение как уравнения (3) для любого квазимогочлена $b(t)$ (равно как и для некоторых других элементарных функций), так и системы линейных дифференциальных уравнений.

Таблица 1

| Оригинал | Изображение | Оригинал | Изображение |
|---|---------------------------------|-------------------------------|--|
| $t^k e^{\lambda t},$ $k=0,1,2,\dots$ | $\frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$ | $t \cos \omega t$ | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\operatorname{ch} \omega t$ | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$ | $t \sin \omega t$ | $\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\operatorname{sh} \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$ | $e^{\lambda t} \cos \omega t$ | $\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$ |
| $\frac{\sin t}{t}$ | $\operatorname{arctg} p$ | $e^{\lambda t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$ |

Заметим также, что в случае, когда начальные условия не заданы, операционный метод дает *общее решение* уравнения (3), выраженное через n произвольных комплексных констант C_1, C_2, \dots, C_n .

Следующие примеры демонстрируют практическую эффективность операционного метода.

Задача Решить задачу Коши:

1.

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos \omega t ,$$

при

$$x(0) = x'(0) = 0 ,$$

где $\omega_0 > 0$, $\omega > 0$ и $A \neq 0$ — некоторые константы.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Воспользовавшись табл. 1 и приравняв изображения от обеих частей данного уравнения, получим

$$(p^2 + \omega_0^2) X(p) = \frac{Ap}{p^2 + \omega^2}.$$

Откуда $X(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)}.$

Если $\omega \neq \omega_0$ (то есть если мы имеем *нерезонансный* случай), то, разложив найденное изображение на простейшие дроби

$$X(p) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right),$$

из табл. 1 получаем

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) .$$

Если же $\omega = \omega_0$ (резонансный случай), то

$$X(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega_0^2)^2},$$

и опять-таки по табл. 1 находим, что

Решение
получено .

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t .$$

Задача 2. Решить задачу Коши для уравнения

$$y''' + y' = e^t$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0.$$

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$. Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$, то изображения неизвестной функции будет существовать в комплексной полуплоскости, где $\operatorname{Re} p > 0$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения, с учетом теоремы 2 и таблицы 1, получим

$$y'''(t) \doteq p^3 Y(p) - 2p, \quad y'(t) \doteq pY(p),$$

$$e^t \doteq \frac{1}{p-1}.$$

И, соответственно, уравнение для изображения

$$p^3 Y(p) - 2p + pY(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Уравнение для изображения легко решается:

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 2p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}.$$

Полученную дробно-рациональную функцию преобразуем, разложив ее каким-либо образом на простейшие дроби

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp}{p^2+1} + \frac{D}{p^2+1}.$$

Применив, например, метод неопределенных коэффициентов, получим

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{5}{2}.$$

Для найденного изображения

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1},$$

воспользовавшись линейностью преобразования Лапласа и таблицей 1, найдем оригинал

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot \cos t + \frac{5}{2} \cdot \sin t,$$

Решение

получено. являющийся решением задачи Коши.

Задача 3. Решить задачу Коши для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

при

$$x(0) = y(0) = -1 .$$

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$. Поскольку собственные числа основной матрицы системы $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то изображения неизвестных будут существовать (покажите это самостоятельно!) в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2 = \max\{-1, 1, 2\}$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} pX - (-1) = -X - 2Y + \frac{2}{p+1}, \\ pY - (-1) = 3X + 4Y + \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Следовательно, для изображений неизвестных мы имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = -\frac{p-1}{p+1}, \\ -3X + (p-4)Y = -\frac{p}{p+1}, \end{cases}$$

решения которой легко находятся и имеют вид

$$\begin{cases} X(p) = \frac{-p^2 + 7p - 4}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}, \\ Y(p) = \frac{-p^2 - 4p + 3}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}. \end{cases}$$

Разложение этих изображений на простейшие дроби дает

$$\begin{cases} X(p) = -\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2}, \\ Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} - \frac{3}{p-2}. \end{cases}$$

Наконец, используя линейность преобразования Лапласа и табл. 1, по полученным изображениям восстанавливаем оригиналы искомых функций, которые являются решением задачи Коши:

Решение
получено .

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} - e^t + 2e^{2t}, \\ y(t) = e^{-t} + e^t - 3e^{2t}. \end{cases}$$