Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \qquad \forall t \in T \subset R^1, \tag{1}$$

где элементы матрицы $\|A\|$ — комплексные константы. Комплексно-значную нелинейную и непрерывную вектор-функцию $\|b(t)\|$ будем называть для краткости *неоднородностью.*

Теорема 1. **Общее решение неоднородной системы (1) представимо как сумма** *общего решения* **однородной системы (1) и** *частного решения* **этой же неоднородной системы (1).**

Достаточно часто поиск частного решения линейной неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 2. **Пусть** $\|x_{(1)}(t)\|$ **– решение системы (1) с неоднородностью** $\|b_{(1)}(t)\|$**, а** $\|x_{(2)}(t)\|$ **— решение системы (1) с неоднородностью** $\|b_{(2)}(t)\|$**, тогда**

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Согласно теореме 1, для решения неоднородной системы (1) необходимо (помимо общего решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной.

Как и в случае линейного неоднородного уравнения n-го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах методом *вариации постоянных*, который описывает

Теорема 3. **Частным решением системы (1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\|g_{(k)}(t)\| \,, \tag{2}$$

где $\{\,\|g_{(1)}(t)\|, \|g_{(2)}(t)\|, \ldots, \|g_{(n)}(t)\|\,\}$ **— некоторый базис в линейном** n**-мерном пространстве частных решений** *однородной* **системы (1), а функции** $C_k(t)$ **находятся из матричного уравнения**

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \,.$$

Практическое использование метода вариации постоянных продемонстрируем для следующей задачи.

Задача 1. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \,, \\ \dot{y} = x + \operatorname{tg} t \,. \end{cases}$$

Решение. 1°. Матричная форма данной системы будет

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cr} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \operatorname{tg}^2 -1 \\ \operatorname{tg} t \end{array} \right\| .$$

Для построения частного решения неоднородной системы предварительно необходимо найти общее решение однородной, которая имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cr} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| .$$

Поскольку нас интересует только общее вещественное решение исходной неоднородной системы, метод вариации постоянных естественно применить, используя общее вещественное решение однородной.

Убедитесь самостоятельно, что это решение может быть представлено в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\| + C_2 \left\| \begin{array}{c} \sin t \\ \cos t \end{array} \right\| ,$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы.

2°. Согласно схеме метода вариации постоянных частное решение неоднородной системы следует искать в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right\| = C_1(t) \left\| \begin{array}{r} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\| + C_2(t) \left\| \begin{array}{c} \sin t \\ \cos t \end{array} \right\| , \qquad (3)$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, которые (согласно утверждению теоремы 3) можно найти из матричного уравнения

$$\dot{C}_1(t) \left\| \begin{array}{r} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\| + \dot{C}_2(t) \left\| \begin{array}{c} \sin t \\ \cos t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \mathrm{tg}^2 - 1 \\ \mathrm{tg}\, t \end{array} \right\| . \qquad (4)$$

Напомним, что последнее равенство получается при подстановке (3) в исходную неоднородную систему.

3°. Используя правила операций с матрицами нетрудно показать, что равенство (4) есть неоднородная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\left\|\begin{array}{rr} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{array}\right\| , \qquad (5)$$

решение которой найдем по теореме Крамера:

$$\Delta \ = \det \left\|\begin{array}{rr} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{array}\right\| = 1\,,$$

$$\Delta_1 = \det \left\|\begin{array}{cc} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{array}\right\| = -\cos t\,,$$

$$\Delta_2 = \det \left\|\begin{array}{rc} \cos t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \operatorname{tg} t \end{array}\right\| = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t},$$

Откуда

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{C}_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\cos t\,, \\ \dot{C}_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} C_1(t) = -\sin t\,, \\ C_2(t) = \cos t + \dfrac{1}{\cos t}\,. \end{array}\right.$$

4°. По формуле (3) получаем частное решение неоднородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x^* \\ y^* \end{array} \right\| = (-\sin t) \left\| \begin{array}{r} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\| + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t} \right) \left\| \begin{array}{c} \sin t \\ \cos t \end{array} \right\| ,$$

что, после выполнения операций с матрицами, дает (проверьте это самостоятельно)

$$\left\| \begin{array}{c} x^*(t) \\ y^*(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{array} \right\| .$$

Теперь мы можем выписать общее решение исходной неоднородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\| + C_2 \left\| \begin{array}{c} \sin t \\ \cos t \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{array} \right\| ,$$

Решение получено.

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы.

В случае, когда неоднородности в системе (1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$, ее частное решение может быть найдено без интегрирования — *методом неопределенных коэффициентов*.

Действительно, при $\mu = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

Теорема 4. **Пусть система уравнений (1) такова, что**

$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\mu t}$, **где**

$\|p(t)\| = \|a_{(m)}\|\,t^m + \|a_{(m-1)}\|\,t^{m-1} + \ldots + \|a_{(1)}\|\,t + \|a_{(0)}\|$.

Тогда частное решение системы (1) имеет вид $\|\,q(t)\|e^{\mu t}$, **где** $\|q(t)\|$ **– вектор-многочлен**

- **той же самой степени, что и** $\|\,p(t)\,\|$**, если** μ **не является корнем характристического уравнения;**
- **степени не выше, чем** $m + l$**, если** μ **является корнем характеристического уравнения, а** l **— размер максимальной из жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы** $\|A\|$**.**

Описанный метод проиллюстрируем примером.

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dot{x} & = & 3x & - & y & + & e^t + e^{2t} - 2t^2 \; , \\ \dot{y} & = & 2x & & & + & 3e^t + 2e^{2t} - t^2 \; . \end{array}\right.$$

Решение. 1°. Запишем решаемую систему в следующей матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^{2t} + \left\| \begin{array}{r} -2t^2 \\ -t^2 \end{array} \right\|$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \| A \| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\| b_{(1)} \right\| e^t + \left\| b_{(2)} \right\| e^{2t} + \left\| b_{(3)} \right\| t^2 .$$

введя (удобные для дальнейших расчетов) обозначения

$$\| A \| = \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| , \quad \left\| b_{(1)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right\| ,$$

$$\left\| b_{(2)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| , \qquad \left\| b_{(3)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right\| ,$$

2°. Теперь построим по стандартной схеме общее решение однородной системы:

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| .$$

Найдем вначале собственные значения линейного преобразования с матрицей $\|A\|$:

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{array} \right\| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 1\,, \\ \lambda_2 & = & 2 \end{array}$$

и соответствующие собственные векторы:

$$\left\| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| ,$$

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

В итоге получаем общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} .$$

3°. Используя теорему 2, найдем теперь частные решения исходной неоднородной системы отдельно для каждой из неоднородностей, содержащих соответственно $\left\|b_{(1)}\right\|$, $\left\|b_{(2)}\right\|$ и $\left\|b_{(3)}\right\|$.

Рассмотрим подробно случай неоднородности $\left\|b_{(1)}\right\| e^t$, которая является векторным квазимногочленом, у которого $\mu = \lambda_1 = 1$, причем $m = 0$, а $l = 1$, поскольку μ совпадает с однократным корнем характеристического многочлена (это — резонанс!)

Значит, частное решение следует искать в виде

$$\left\|r^*_{(1)}\right\| = \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t,$$

где первый нижний индекс у $\left\|a_{(ij)}\right\|$ равен показателю степени t, а второй – номеру частного решения.

Подстановка этой формулы в неоднородную систему

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \|A\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\|b_{(1)}\right\| e^t$$

дает

$$\Big(\left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big) e^t =$$

$$= \|A\| \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big) e^t + \left\|b_{(1)}\right\| e^t .$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|A\| \left\|a_{(11)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| , \\ \|A\| \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|b_{(1)}\right\| & = & \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big(\|A\| - \|E\|\Big)\left\|a_{(11)}\right\| & = & \|o\| , \\ \Big(\|A\| - \|E\|\Big)\left\|a_{(01)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| - \left\|b_{(1)}\right\| . \end{array} \right. \qquad (6)$$

Заметим, что матрицы в левых частях обоих уравнений системы (6) вырождены. Это есть следствие равенства $\mu = \lambda_1 = 1$.

При этом первое уравнение (как однородное) совместно и имеет неединственное решение вида $\left\| a_{(11)} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\|$. Второе же уравнение неоднородное, оно будет иметь решения, вообще говоря, не при любом $\left\| a_{(11)} \right\|$. Но его можно сделать совместным, подобрав подходящее значение α.

Действительно, расширенная матрица второго уравнения системы (6) будет иметь ранг, равный рангу основной матрицы (что по теореме Кронекера–Капелли гарантирует совместность), если будут выполнены равенства

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{array}{rr|r} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 2\alpha - 3 \end{array} \right\| = \operatorname{rg} \left\| \begin{array}{rr|r} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{array} \right\| = 1\,.$$

Это дает $\alpha = 2$ и $\left\| a_{(11)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\|$. Вектор $\left\| a_{(01)} \right\|$ здесь неоднозначен, его можно взять равным $\left\| a_{(01)} \right\| = \left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\|$ и тогда $\left\| r^*_{(1)} \right\| = \left(\left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t$.

Случаи неоднородностей $\left\| b_{(2)} \right\|$ и $\left\| b_{(3)} \right\|$ рассматриваются аналогично первому.

Второй случай также резонансный, причем частным решением оказывается квазимногочлен нулевой степени (теорема 4 это допускает), то есть,

$$\left\| r^*_{(2)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} .$$

В третьем случае резонанса нет, а частное решение имеет вид

$$\left\| r^*_{(3)} \right\| = -\frac{1}{4} \left\| \begin{array}{r} 5 \\ 13 \end{array} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right\| .$$

Окончательно получаем общее решение неоднородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} +$$

$$+ \left(\left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} -$$

Решение получено.

$$-\frac{1}{4} \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 13 \end{array} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right\| .$$