Положения равновесия автономных систем второго порядка

Теорема о выпрямлении траекторий не применима в окрестностях положений равновесия. Исследование поведения фазовых траекторий в этих областях требует использования более сложных, специальных методов.

Одним из таких методов, например, может послужить локальная линеаризация исходной системы в малой окрестности положения равновесия, а также набор условий, гарантирующий подобие поведения (или, как принято говорить, *эквивалентность*) в этой окрестности фазовых траекторий исходной и линеаризованных систем.

Рассмотрим в качестве примера вещественную нелинейную автономную систему второго порядка

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & F_1(x_1, x_2)\,, \\ \dot{x}_2 & = & F_2(x_1, x_2)\,, \end{array} \right. \tag{1}$$

где $F_1(x_1, x_2)$ и $F_2(x_1, x_2)$ – заданные вещественные, непрерывно дифференцируемые в области $\Omega \subseteq E^2$ функции.

Найдем фазовый портрет для этой системы в окрестности некоторой точки $\| x_{01} \; x_{02} \|^{\mathrm{T}} \in \Omega$.

Без потери общности можно считать, что $\| x_{01} \; x_{02} \|^{\mathrm{T}} = \| 0 \; 0 \|^{\mathrm{T}}$, поскольку начало координат фазовой плоскости переносится в рассматриваемую точку линейной невырожденной заменой

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} y_1 & = & x_1 & - & x_{01}\,, \\ y_2 & = & x_2 & - & x_{02}\,. \end{array} \right.$$

Если начало координат не есть особая точка, то фазовый портрет можно получить, применяя теорему о выпрямлении траекторий, из которой следует, что фазовые траектории в малой окрестности начала координат суть почти прямые, непересекающиеся линии.

Допустим теперь, что начало координат является положением равновесия системы (1). Тогда из равенств $F_1(0,0) = 0$ и $F_2(0,0) = 0$ и формулы Тейлора следуют соотношения

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} F_1(x_1,x_2) & = & \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & o(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,), \\ F_2(x_1,x_2) & = & \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & o(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,), \end{array} \right.$$

где

$$\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{x_1\,=\,0,\\ x_2\,=\,0}} \qquad i,j = 1,2\,.$$

Тогда система (1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 &+ \alpha_{12}x_2 &+ o(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,), \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 &+ \alpha_{22}x_2 &+ o(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,) \end{cases}$$

и естественно дать

Определение 1. Линейная однородная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 &+ \alpha_{12}x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 &+ \alpha_{22}x_2 \end{cases} \tag{2}$$

называется *линеаризацией* системы (1) в начале координат.

Как и раньше, будем использовать обозначение

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} .$$

Основой для исследования поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (1) служит

Теорема 1. (О линеаризации) **Если для линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, *все* собственные значения различны и имеют *ненулевые* вещественные части, то особая точка в начале координат системы (1) имеет тот же вид фазового портрета, что и ее линеаризация (2). При этом в малой окрестности особой точки сохраняются такие особенности фазовых траекторий, как направление закручивания и устойчивость.**

Будем исследовать характер поведения фазовых траекторий *линейных* автономных систем, для $n = 2$, то есть для случая, когда фазовое пространство есть плоскость.

Рассмотрим линейную, с произвольными вещественными коэффициентами, автономную систему уравнений вида

$$\left\|\dot{X}\right\| = \|A\|\,\|X\| \tag{3}$$

или же в развернутой матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| ,$$

где

$$\left\|\dot{X}\right\| = \left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right\| , \qquad \|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| , \qquad \|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| .$$

Определение 2.	Если $\det \|A\| \neq 0$, то систему (3) называют *простой*, и называют *сложной* при $\det \|A\| = 0$.

В силу определений 1 и 2 простая система (согласно теореме Крамера) имеет единственное положение равновесия — начало координат в E^2 – точку o.

Для исследования характера поведения фазовых траекторий системы (3) желательно найти аналитическое представление ее общего решения, что требует вычисления собственных значений λ_1 и λ_2, а также собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицой $\|A\|$, обозначаемых далее как $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$.

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Числа λ_1 и λ_2 вещественные, различные и отличные от нуля

В этом случае в E^2 существует базис из собственных векторов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$, в котором система (3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и соответственно решения $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид

$$\begin{aligned} y_2 &= C_2 \left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad && \text{при } C_1 \neq 0\,, \\ y_1 &= 0, && \text{при } C_1 = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Из формул (4) следует, что если λ_1 и λ_2 одного знака, то фазовые траектории являются дугами парабол, касающихся в начале координат оси Oy_1 при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. При $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ траектории в начале координат касаются оси Oy_2.

Если λ_1 и λ_2 отрицательны, то движение с ростом t по фазовым траекториям происходит по направлению к началу координат, и положение равновесия называется *асимптотически устойчивым узлом.*

В случае, когда λ_1 и λ_2 положительны, движение происходит от начала координат (*неустойчивый узел*). Следует отметить, что координатные полуоси, равно как и само начало координат, также являются фазовыми траекториями.

Наконец, следует выполнить обратный переход к исходным переменным x_1 и x_2, который является линейным невырожденным (аффинным) преобразованием в E^2.

Само преобразование при построении фазового портрета находить необязательно. Достаточно воспользоваться тем его свойством, что собственные векторы матрицы $\|A\|$ являются направляющими векторами прямолинейных фазовых траекторий

Итоговый вид фазовых портретов для положения равновесия типа *устойчивый узел* показан на рис. 1A, а для положения равновесия типа *неустойчивый узел* – на рис. 1B.

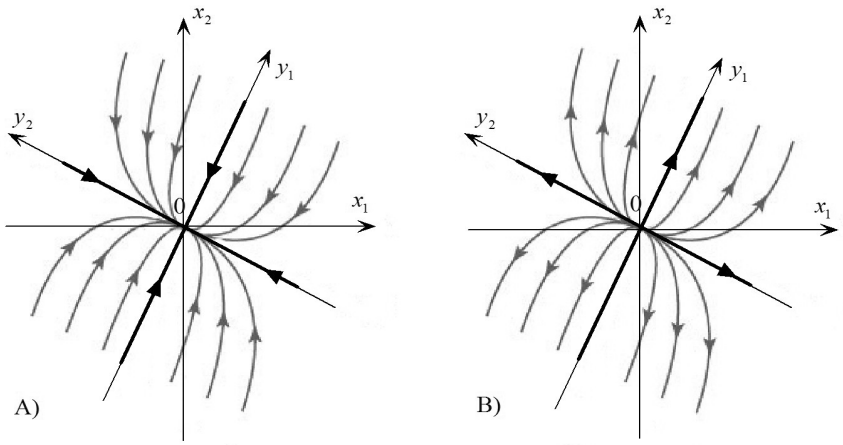

Рис. 1. Положение равновесия *узел*.

Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия называется *седлом*. Оно всегда неустойчиво, поскольку одно из собственных значений матрицы $\|A\|$ положительно.

В базисе из собственных векторов фазовые траектории седла (отличные от координатных полуосей и начала координат) по свойствам аналогичны ветвям гипербол. Действительно, из (4) имеем:

$$\lim_{y_1 \to 0} |\, y_2| = +\infty\,, \qquad \lim_{|\, y_1| \to +\infty} y_2 = 0\,.$$

Движение по траекториям, являющимся координатными полуосями, направлено от начала координат для оси, которой соответствует $\lambda > 0$, и направлено к началу координат, если $\lambda < 0$. По остальным фазовым траекториям направление движения в каждой четверти координатной плоскости определяется направлением движения по смежным координатным полуосям (см. рис. 2).

Переход к исходным переменным выполняется также как и в случае узла.

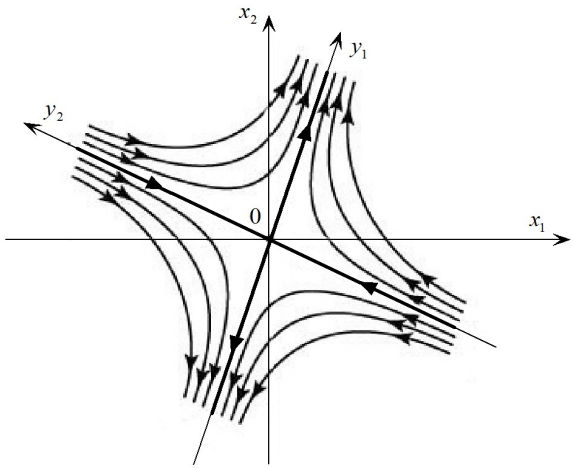

Рис. 2. Положение равновесия *седло* с $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Задача 1. Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий линеаризаций в окрестности положения равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln\left(3+y-y^2\right), \\ \dot{y} &= \arcsin\left(x-y^2\right). \end{cases}$$

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \ln\left(3+y-y^2\right) &= 0\,, \\ \arcsin\left(x-y^2\right) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3+y-y^2 &= 1\,, \\ x-y^2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= 1\,, \\ y_1 &= -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 &= 4\,, \\ y_2 &= 2\,. \end{cases}$$

2°. Исследуем положение равновесия – точку $M(1;\,-1)$. Вначале перенесем начало координат в особую точку M при помощи замены переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x-1\,, \\ v & = & y+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & u+1\,, \\ y & = & v-1\,. \end{array}\right.$$

В этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\ln\left(3+y-y^2\right) = \ln\left(3+(v-1)-(v-1)^2\right) = \\ &= \ln\left(1+3v-v^2\right) = 3v + o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\arcsin\left(x-y^2\right) = \arcsin\left(u+1-(v-1)^2\right) = \\ &= \arcsin\left(u+2v-v^2\right) = u+2v+o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,. \end{aligned}$$

Откуда следует, что линеаризация (3) для особой точки M имеет вид

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \dot{u} & = & & & 3v\,, \\ \dot{v} & = & u & + & 2v \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \|A\| = \left\|\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right\|\,.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det\|A-\lambda E\|=0$.

$$\det\|A-\lambda E\| \;=\; \det\left\|\begin{matrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{matrix}\right\| \;=\; \lambda^2-2\lambda-3=0\,.$$

Следовательно, $\lambda_1=-1\,,\;\;\lambda_2=3$, и положение равновесия M есть седло.
Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему уравнений

$$\|A-\lambda E\|\,\|h\|=\|o\|\,.$$

В нашем случае для $\lambda_1=-1$

$$\left\|\begin{matrix} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{matrix}\right\|\left\|h_{(1)}\right\|=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\|h_{(1)}\right\|=\left\|\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}\right\|\,.$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$

$$\begin{Vmatrix} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{Vmatrix} \left\| h_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\| h_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

При построении эскиза фазового портрета для особой точки M учитываем, что прямолинейные фазовые траектории имеют своими направляющими собственные векторы $\left\| h_{(1)} \right\|$ и $\left\| h_{(2)} \right\|$ и являются при этом асимптотами для криволинейных траекторий.

Направления движения по прямолинейным траекториям: от начала координат для асимптоты с $\left\| h_{(2)} \right\|$, так как $\lambda_2 = 3 > 0$, и соответственно к началу координат для асимптоты с $\left\| h_{(1)} \right\|$, так как $\lambda_1 = -1 < 0$.

Как следствие этого факта, направления движения по криволинейным фазовым траекториям при этом оказываются однозначно определенными, поскольку в силу непрерывности они должны совпадать с направлениями движения по прямолинейным как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Итоговый вид эскиза показан на рис. 3А.

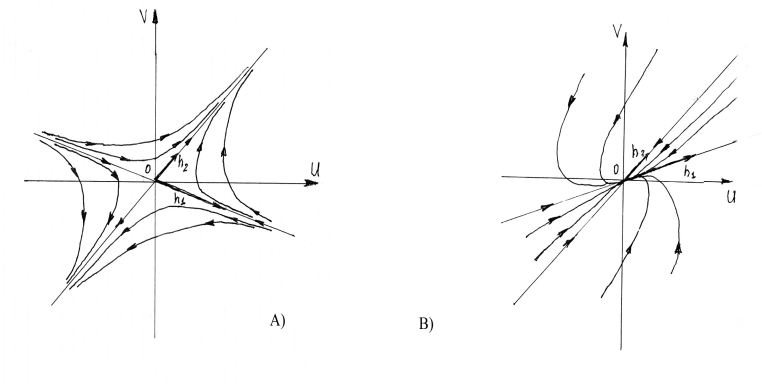

Рис. 3. Фазовые портреты положений равновесия для задачи 1.

3°. Исследуем теперь второе положение равновесия – точку $N(4;2)$. Вначале перенесем начало координат в особую точку N при помощи замены переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x-4\,, \\ v & = & y-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & u+4\,, \\ y & = & v+2\,. \end{array}\right.$$

В этом случае справедливы равенства:

$$\ln\left(3+y-y^2\right) = \ln\left(3+(v+2)-(v+2)^2\right) = \\ = \ln\left(1-3v-v^2\right) = -3v + o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,,$$

$$\arcsin\left(x-y^2\right) = \arcsin\left(u+4-(v+2)^2\right) = \\ = \arcsin\left(u-4v-v^2\right) = u-4v+o(\sqrt{u^2+v^2}\,)\,.$$

Откуда следует, что линеаризация (3) для особой точки N имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcrcr} \dot{u} & = & & - & 3v\,, \\ \dot{v} & = & u & - & 4v \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{array} \right\| .$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det \left\| \begin{array}{cc} -\lambda & -3 \\ 1 & -4-\lambda \end{array} \right\| \;=\; \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0\,.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -3$ и положение равновесия N есть устойчивый узел. Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему $\|A - \lambda E\|\,\|h\| = \|o\|\,.$

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\left\| \begin{array}{cc} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{array} \right\| \left\| h_{(1)} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\| h_{(1)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Аналогично для $\lambda_2 = -3$

$$\begin{Vmatrix} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{Vmatrix} \|h_{(2)}\| = \begin{Vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|h_{(2)}\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Исследуем теперь свойства фазовых траекторий. Это удобно сделать, перейдя в базис из собственных векторов, то есть в базис $\left\{\|h_{(1)}\|; \|h_{(2)}\|\right\}$, координаты в котором обозначим как $p(t)$ и $q(t)$. В этом базисе решения линеаризованной системы (3) имеют особенно простой вид:

$$\begin{cases} p(t) &= C_1 e^{-t}, \\ q(t) &= C_2 e^{-3t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. При $C_1 = 0$ вид фазовых траекторий очевиден: в зависимости от C_2, это прямолинейные лучи или точка.

Исключив t из этих равенств при $C_1 \neq 0$, получим уравнения фазовых траекторий в виде $q = Dp^3$, где D – произвольная константа. То есть траектории суть дуги кубичных парабол, касающихся в нуле оси $\|h_{(1)}\|$. Направление движения по всем траекториям одинаково: к положению равновесия. Эскиз портрета показан на рис. 3В.

Решение получено.

Собственные значения невещественные и не равные друг другу.

В этом случае из вещественности коэффициентов матрицы $\|A\|$ следует, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ при условии $\beta \neq 0$.

Собственные векторы $\| h_{(1)}\|$ и $\| h_{(2)}\|$, отвечающие λ_1 и λ_2, комплексно сопряженные и линейно независимы как элементы в унитарном пространстве U^2, поэтому, если

$$\| h_{(1)}\| = \|p\| + i\|q\| \qquad \text{и} \qquad \| h_{(2)}\| = \|p\| - i\|q\|,$$

то $\|p\|$ и $\|q\|$ вещественные и также линейно независимые элементы пространства E^2.

Комплекснозначная вектор-функция

$$\|x(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t} \|h_{(1)}\| = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \left(\|p\,\| + i\|q\|\right)$$

в данном случае является решением системы (3) при любой комплексной константе C_1.

Кроме того, решением системы (3) будет и *вещественная* вектор-функция $\operatorname{Re}\|x(t)\|$.

Найдем ее вид, представив предварительно константу C_1 в *экспоненциальной* форме $C_1 = \rho\, e^{i\theta}$, где $\rho \geq 0$, θ — произвольные вещественные постоянные.

Из

$$\|x(t)\| = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)} \left(\|p\| + i\|q\| \right)$$

получаем, что

$$\operatorname{Re} \|x(t)\| = \|p\| \, \rho \, e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) - \|q\| \, \rho \, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta) \, .$$

В силу линейной независимости $\|p\|$ и $\|q\|$ можно утверждать, что скалярные функции

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho \, e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \, , \\ y_2(t) = \rho \, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta) \end{cases} \tag{5}$$

задают параметрическое представление интегральных кривых системы (1) в *новом декартовом базисе* $\{ \, \|p\|; \; -\|q\| \, \}$, а сами являются соответствующими декартовыми координатами.

Определение вида фазовых траекторий удобно выполнить, перейдя от декартовой системы координат к полярной по стандартным формулам

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\varphi\,, \\ y_2 = r\sin\varphi\,. \end{cases} \tag{6}$$

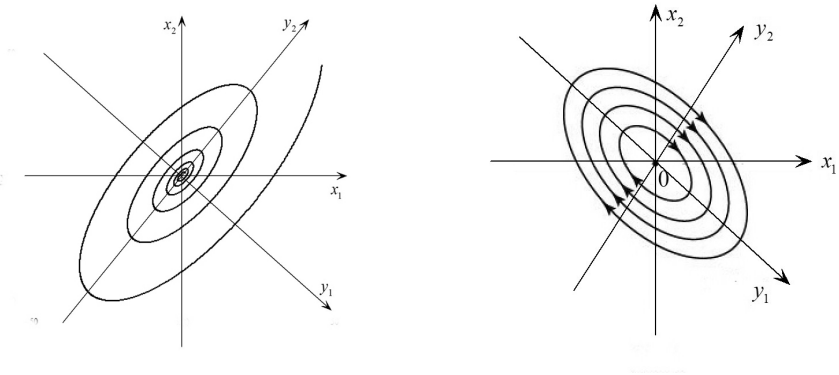

Рис. 4. Положения равновесия *фокус* и *центр*.

Формулы (5) и (6) позволяют получить удобное параметрическое представление фазовых траекторий в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = \rho\, e^{\alpha t}\,, \\ \varphi = \beta t + \theta\,, \end{cases} \tag{7}$$

из которого следует, что фазовые траектории в базисе $\{\, \|p\|;\ -\|q\|\,\}$

при $\alpha > 0$ суть раскручивающиеся от начала координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*);

при $\alpha < 0$ суть скручивающиеся к началу координат логарифмические спирали (это положение равновесия называется *асимптотически устойчивым фокусом*);

при $\alpha = 0$ образуют систему концентрических окружностей с центром в начале координат (положение равновесия называется *центром*). Это положение равновесия устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво *асимптотически* .

Важно отметить: формулы (7) дают *все* вещественные решения, поскольку *для каждой* точки $\{ y_1, y_2 \}$ существуют значения полярных координат ρ и θ такие, что через эту точку проходит *единственная* в силу теоремы Коши фазовая траектория вида (7).

Переход от базиса $\{ \|p\|; -\|q\| \}$ к исходному выполняется стандартно.

Направление движения по фазовым траекториям (то есть, по часовой стрелке или против) можно установить, найдя фазовую скорость для некоторой конкретной точки, не являющейся положением равновесия. Например из (3) следует, что в точке $\| 1\ 0 \|^{\mathrm{T}}$ фазовая скорость равна вектору $\| \alpha_{11}\ \alpha_{21} \|^{\mathrm{T}}$.

Кроме того, для уточнения вида фазовой траектории полезной может оказаться информация о точках, в которых касательная к ней либо горизонтальна (то есть, $\dot{x}_2 = 0$), либо вертикальна ($\dot{x}_1 = 0$).

Уравнения соответствующих изоклин находятся из системы (3) и имеют вид

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$$

соответственно.

Задача 2. Найти расположенные во второй четверти положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \exp(4x+3y-4)-1\,, \\ \dot{y} &= x^2-4x-3y\,. \end{cases}$$

Определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий.

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \exp(4x+3y-4)-1 &= 0\,, \\ x^2-4x-3y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y &= 4\,, \\ 4x+3y &= x^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= 2\,, \\ y_1 &= -4/3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 &= -2\,, \\ y_2 &= 4\,. \end{cases}$$

2°. Перенесем начало координат в положение равновесия – точку $M(-2;\,4)$, расположенную во второй четверти, сделав замену переменных $x = u-2$ и $y = v+4$. В этом случае значения функций, стоящих в правых частях исследуемой автономной системы будут равны:

$$\begin{aligned} &\exp(4x+3y-4)-1 = \exp(4u+3v)-1\,, \\ &x^2-4x-3y \qquad\qquad\quad = u^2-8u-3v\,. \end{aligned}$$

В этой задаче (в отличие от задачи 1) для нахождения коэффициентов линеаризации (8) мы не будем применять разложений по формуле Тейлора, а воспользуемся теоремой Тейлора, т.е. формулами (7), из которых непосредственно следует, что в новом начале координат, то есть в точке $\left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$,

$$\alpha_{11} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\exp\,(4u+3v)-1\Big) = 4\,,$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial}{\partial v}\Big(\exp\,(4u+3v)-1\Big) = 3\,,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(u^2-8u-3v\Big) = -8\,,$$

$$\alpha_{22} = \frac{\partial}{\partial v}\Big(u^2-8u-3v\Big) = -3\,.$$

Полученные равенства проверьте самостоятельно.

Откуда следует, что линеаризация (8) для особой точки M имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{u} & = & 4u & + & 3v\,, \\ \dot{v} & = & -8u & - & 3v \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \|A\| = \left\| \begin{matrix} 4 & 3 \\ -8 & -3 \end{matrix} \right\|\,.$$

3°. Найдем собственные значения линейного оператора с матрицей матрицы $\|A\|$

$$\det \begin{Vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -8 & -3-\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 12 = 0\,.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = \left(1 \pm i\sqrt{47}\right)/2$ и положение равновесия M есть *неустойчивый фокус*.

Заметим, что раскручивание спирали фазовой траектории происходит *по часовой стрелке*, поскольку вектор фазовой скорости, например, в точке

$$\begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \qquad \text{равен} \qquad \begin{Vmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

Решение получено.

Наконец, легко видеть, что AB – изоклина вертикальных касательных к исследуемой фазовой траектории – имеет уравнение $4u + 3v = 0$, в то время как CD – изоклина горизонтальных – уравнение $8u + 3v = 0$.

Итоговый вид эскиза показан на рис. 5.

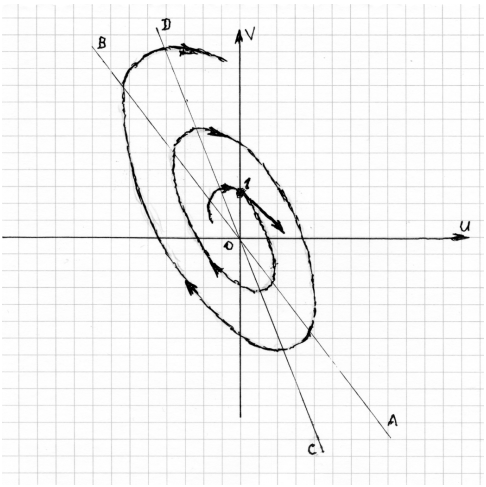

Рис. 5. Фазовый портрет положения равновесия для задачи 2 .