Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление, или *метод Хевисайда*, является одним из наиболее эффективных методов решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами. Приведем его краткое описание.

Определение 1.	*Оригиналом* называется функция $f(t)$ такая, что 1° $f(t) \equiv 0\ \forall t < 0$ и непрерывна при $t \geq 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек; 2° для $f(t)$ существуют константы $M > 0$ и $\mu \geq 0$ такие, что $$\lvert f(t)\rvert \leq Me^{\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Определение 2.	Функция $F(p)$ (зависящая от комплексной переменной p) вида $$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\,dt \qquad (1)$$ называется *изображением* функции $f(t)$ или же *преобразованием Лапласа функции* $f(t)$, что кратко записывается как $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в виде следующего набора утверждений.

Лемма 1. **В условиях определения 1 несобственный интеграл (1) очевидно сходится в комплексной полуплоскости** $\operatorname{Re} p > \mu$.

Лемма 2. **Несобственный интеграл (1) является в области своего существования бесконечно дифференцируемой функцией.**

Теорема 1. **Преобразование Лапласа линейно.**

Теорема 2. **Пусть** $f^{(m)}(t)$ $\forall m = 0, 1, 2, \ldots, k$ **– оригиналы, тогда**

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \ldots - p\, f^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0)\,.$$

Теорема 3. **Для любого** $s > 0$ $\quad f(t-s) \risingdotseq e^{-p\,s} F(p)$ **.**

Из определения 2 следует, что изображение для каждого оригинала существует и единственно. При этом естественно возникает вопрос: всегда ли по изображению можно восстановить оригинал? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. **Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрывов, и определяется формулой**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \to +\infty} \int\limits_{c-iw}^{c+iw} e^{tp} F(p)\, dp\,. \tag{2}$$

В формуле (2) интеграл берется на комплексной плоскости по любой прямой $\operatorname{Re} z = c > \mu$.

Рассмотрим теперь применение операционного исчисления для решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t) \tag{3}$$

(или $L(\widehat{D})y(t) = b(t)$) с комплексными постоянными коэффициентами в случае, когда $b(t)$ есть квазимногочлен при $t \geq 0$. Начальные условия будем считать известными:

$$y(+0) = C_1,\ y'(+0) = C_2,\ y''(+0) = C_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(+0) = C_n\ . \tag{4}$$

Согласно теоремам 1 и 2 , $y(t)$ — каждое решение этого уравнения для неотрицательных t — также есть квазимногочлен.

Доопределим значения функций $b(t)$ и $y(t)$ тождественными нулями при $t < 0$. Тогда эти функции являются некоторыми оригиналами, поскольку пункт 2° определения 1 выполняется для квазимногочленов очевидным образом.

Пусть $b(t) \risingdotseq B(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применяя преобразование Лапласа (в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \mu$, то есть в которой оно существует) к обеим частям уравнения (3) и учитывая условия (4), в силу теоремы 2 получаем

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) Y(p) - H(p) = B(p)$$

или

$$L(p)Y(p) - H(p) = B(p)\ , \tag{5}$$

где

$$H(p) = p^{n-1}C_1 + p^{n-2}C_2 + \ldots + p\,C_{n-1} + C_n +$$
$$+a_1\left(p^{n-2}C_1 + p^{n-3}C_2 + \ldots + p\,C_{n-2} + C_{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}C_1\ .$$

Уравнение (5) относительно $Y(p)$ линейное и алгебраическое. Его решение при $\mathrm{Re}p > \mu$ есть

$$Y(p) = \frac{B(p) + H(p)}{L(p)} \, .$$

Хотя оригинал $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$ можно получить при помощи формулы (2), на практике удобнее поступить иначе.

Можно воспользоваться взаимной однозначностью связи оригиналов и отображений, допускающей «подбор» решений при помощи специальной табл. 1, основой которой служит

Лемма 3. **Для каждого целого неотрицательного k справедливо равенство**

$$t^k e^{\lambda t} \doteq \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}} \,.$$

Содержимое табл. 1 получается из формулы, данной в лемме 3, и формулы Эйлера $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$.

Кроме того, функция $Y(p)$ дробно-рациональная, то есть, она всегда может быть разложена на простейшие дроби, подобные представленным в табл. 1.

Наконец, линейность преобразования Лапласа и взаимная однозначность сопоставления оригинала и изображения позволяют находить решение как уравнения (3) для любого квазимогочлена $b(t)$ (равно как и для некоторых других элементарных функций), так и системы линейных дифференциальных уравнений.

Таблица 1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$t^k e^{\lambda t}$, $k=0,1,2,\ldots$	$\dfrac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Заметим также, что в случае, когда начальные условия не заданы, операционный метод дает *общее решение* уравнения (3), выраженное через n произвольных комплексных констант $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Следующие примеры демонстрируют практическую эффективность операционного метода.

Задача 1. Решить задачу Коши:

$$x'' + \omega_0^2\, x = A\cos\omega t\ ,$$

при

$$x(0) = x'(0) = 0\ ,$$

где $\omega_0 > 0,\ \omega > 0$ и $A \neq 0$ — некоторые константы.

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Воспользовавшись табл. 1 и приравняв изображения от обеих частей данного уравнения, получим

$$\left(p^2 + \omega_0^2\right) X(p) = \frac{Ap}{p^2 + \omega^2}\,.$$

Откуда $X(p) = \dfrac{Ap}{\left(p^2 + \omega_0^2\right)\left(p^2 + \omega^2\right)}\,.$

Если $\omega \neq \omega_0$ (то есть если мы имеем *нерезонансный* случай), то, разложив найденное изображение на простейшие дроби

$$X(p) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2} - \frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right) ,$$

из табл. 1 получаем

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right) .$$

Если же $\omega = \omega_0$ (*резонансный* случай), то

$$X(p) = \frac{Ap}{\left(p^2 + \omega_0^2\right)^2} \, ,$$

и опять-таки по табл. 1 находим, что

Решение получено.

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} \, t \, \sin \omega_0 t \, .$$

Задача 2. Решить задачу Коши для уравнения

$$y''' + y' = e^t$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 2\,, \quad y''(0) = 0\,.$$

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$, то изображения неизвестной функции будет существовать в комплексной полуплоскости, где $\operatorname{Re} p > 0$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения, с учетом теоремы 2 и таблицы 1, получим

$$y'''(t) \risingdotseq p^3 Y(p) - 2p\,, \qquad y'(t) \risingdotseq pY(p)\,,$$

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}\,.$$

И, соответственно, уравнение для изображения

$$p^3 Y(p) - 2p + pY(p) = \frac{1}{p-1}\,.$$

Уравнение для изображения легко решается:

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 2p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}.$$

Полученную дробно-рациональную функцию преобразуем, разложив ее каким-либо образом на простейшие дроби

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp}{p^2+1} + \frac{D}{p^2+1}.$$

Применив, например, метод неопределенных коэффициентов, получим

$$A = 1\,, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{5}{2}.$$

Для найденного изображения

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1},$$

воспользовавшись линейностью преобразования Лапласа и таблицей 1, найдем оригинал

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot \cos t + \frac{5}{2} \cdot \sin t,$$

Решение получено.

являющийся решением задачи Коши.

Задача 3. Решить задачу Коши для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = \ 3x + 4y + \ \ e^{-t} \end{cases}$$

при

$$x(0) = y(0) = -1 \ .$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Поскольку собственные числа основной матрицы системы $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то изображения неизвестных будут существовать (покажите это самостоятельно!) в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2 = \max\{-1,\ 1,\ 2\}$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} p\,X - (-1) = -X - 2Y + \dfrac{2}{p+1}\,, \\ p\,Y - (-1) = \ \ 3X + 4Y + \dfrac{1}{p+1}\,. \end{cases}$$

Следовательно, для изображений неизвестных мы имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = -\dfrac{p-1}{p+1}\,, \\ -3X + (p-4)Y = -\dfrac{p}{p+1}\,, \end{cases}$$

решения которой легко находятся и имеют вид

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{-p^2+7p-4}{(p+1)(p^2-3p+2)}\,, \\ Y(p) = \dfrac{-p^2-4p+3}{(p+1)(p^2-3p+2)}\,. \end{cases}$$

Разложение этих изображений на простейшие дроби дает

$$\begin{cases} X(p) = -\dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{p-2}\,, \\ Y(p) = \quad \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{3}{p-2}\,. \end{cases}$$

Наконец, используя линейность преобразования Лапласа и табл. 1, по полученным изображениям восстанавливаем оригиналы искомых функций, которые являются решением задачи Коши:

Решение получено.

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} - e^{t} + 2e^{2t}\,, \\ y(t) = \quad e^{-t} + e^{t} - 3e^{2t}\,. \end{cases}$$