Задачи вариационного исчисления с функционалами обобщенного вида

Рассмотрим теперь более общие постановки задач вариационного исчисления, а именно случаи, когда оптимизируемый функционал представляется:

– интегралом, зависящим от производных высших порядков;

– интегралом, зависящим от нескольких неизвестных функций;

– кратным интегралом от неизвестной функции нескольких переменных;

Далее мы будем использовать очевидные аналоги определений для экстремумов и экстремалей, приводя лишь те определения, которые содержат существенно новые условия.

Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим $\mathcal{C}^k[a,b]$ – множество всех k раз $(k \geq 2)$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{x\in[a,b]} \left| y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) \right| \ ,$$

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^k[a,b] \ .$$

Ясно, что в этом случае множество $\mathcal{C}^k[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y, p_1, \ldots, p_k)$ непрерывно дифференцируемая $k+1$ раз при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p_i \in (-\infty, +\infty)$ $\forall i = [1, k]$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k)}(x)\right) dx \tag{7.2.1}$$

на множестве $\mathcal{C}^k_{\vec{A}\vec{B}}[a, b] \subseteq \mathcal{C}^k[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y^{(i)}(a) = A_i$ и $y^{(i)}(b) = B_i$ $\forall i = [0, k-1]$.

По аналогии с ранее использованной символикой, через $\mathcal{C}^k_{\vec{0}\vec{0}}[a,b]$ будем обозначать подмножество функций $h(x)$ в $\mathcal{C}^k[a,b]$, для которых $h^{(i)}(a)=0$ и $h^{(i)}(b)=0$ $\forall i=[0,k-1]$. Заметим также, что для данного класса функций справедлив аналог основной леммы вариационного исчисления.

Как и в случае простейшей вариационной задачи из теоремы Лейбница следует, что справедливо равенство

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} h'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} h^{(k)}(x) \right) dx \ , \qquad (7.2.2)$$

левая часть которого называется первой вариацией функционала (7.2.1).

Повторяя рассуждения проведенные для простейшей вариационной задачи, нетрудно убедиться, что равенство нулю этой первой вариации есть необходимое условие существования экстремума функционала (7.2.1).

Более того, выполнив последовательное интегрирование по частям выражения стоящего в правой части (7.2.2), в силу свойств функций $h(x) \in \mathcal{C}^k_{00}[a,b]$, можно прийти к заключению, что справедлива

Теорема 7.2.1 **Если $2k$ раз непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x) \in \mathcal{C}^k_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$ является слабым экстремумом для функционала (7.2.1), то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера – Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0\ . \quad (7.2.3)$$

Эта теорема позволяет выделять «подозрительные на экстремум» для функционала (7.2.1) функции.

Функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

Пусть $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ – множество всех вектор-функций $\vec{y}(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$ компонентами $y_k(x)$ $\forall k \in [1,n]$. В этом случае $\vec{y}'(x)$ также будет являться вектор-функцией с компонентами $y'_k(x)$ $\forall k \in [1,n]$. И пусть расстояние между вектор-функциями $\vec{y}_{(1)}(x)$ и $\vec{y}_{(2)}(x)$ определяется формулой

$$\rho\left(\vec{y}_{(1)}(x), \vec{y}_{(2)}(x)\right) =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\, y_{1k}(x) - y_{2k}(x)\,| + \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\, y'_{1k}(x) - y'_{2k}(x)\,|$$

$$\forall\ \vec{y}_{(1)}(x), \vec{y}_{(2)}(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]\ .$$

Множество $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y_k \in (-\infty, +\infty)$ и $p_k \in (-\infty, +\infty)$ $\forall k = [1, n]$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F\Big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\Big) dx \qquad (7.2.4)$$

на множестве $\vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a, b] \subseteq \vec{\mathcal{C}}^1[a, b]$ функций $\vec{y}(x)$, удовлетворяющих условиям $y_k(a) = A_k$ и $y_k(b) = B_k$ $\forall k = [1, n]$.

Будет справедлива

Теорема 7.2.2 **Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция** $\vec{y}^*(x) \in \vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$ **является слабым экстремумом для функционала (7.2.4), то ее компоненты удовлетворяют** *системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0 \ \forall k \in [1,n] \ . \qquad (7.2.5)$$

Доказательство.

Присвоим в функционале (7.2.4) всем компонентам, за исключением k-й, $\vec{y}(x)$ значения $\vec{y}^*(x)$. Получим простейшую задачу вариационного исчисления относительно $y_k(x)$.

Необходимое условие экстремума $y_k(x)$ имеет вид k-го уравнения системы (7.2.5.) Поскольку $k \in [1,n]$ может быть любым натуральным, то все уравнения системы (7.2.5) справедливы.

Теорема доказана.

Функционалы, являющиеся кратными интегралами

В ряде важных для приложений классов вариационных задач подлежащий оптимизации функционал представляется кратным интегралом некоторого порядка.

Пусть $\mathbf{C}^1(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u(x,y)$, определенных в замкнутой, ограниченной кусочно-гладкой линией $\partial\Omega$ и измеримой по Жордану, области Ω, принадлежащей декартовой координатной плоскости с ортонормированным базисом.

Определим расстояние между вектор-функциями $u(x,y)$ и $v(x,y)$ формулой

$$\rho\left(u(x,y),v(x,y)\right)=\max_{(x,y)\in\Omega}|u(x,y)-v(x,y)|+$$

$$+\max_{(x,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|+\max_{(x,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|$$

$\forall u(x,y),v(x,y)\in\mathbf{C}^1(\Omega)$.

В этом случае множество $\mathbf{C}^1(\Omega)$ является линейным нормированным пространством.

Обозначим через $\mathbf{C}_0^1(\Omega)$ подмножество функций $h(x,y) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ таких, что $h(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in \partial\Omega$. Тогда справедлива, обобщающая лемму 7.1.1 — основную лемму вариационного исчисления,

Лемма 7.2.1

Пусть $f(x,y)$ **непрерывна в** Ω **и** $\forall h(x,y) \in \mathbf{C}_0^1(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy = 0\ ,$$

тогда $f(x,y) \equiv 0$ **в** Ω**.**

Доказательство леммы проводится «от противного» и дословно повторяет рассуждения, использованные при доказательстве основной леммы вариационного исчисления, за исключением формулы для функции $h(x,y)$.

Пусть $F(x, y, \xi, \eta, \kappa)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $(x, y) \in \Omega$ и $(\xi, \eta, \kappa) \in (-\infty, +\infty)$ функция.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) dxdy \tag{7.2.6}$$

на множестве $\mathbf{C}^1_G(\Omega) \subseteq \mathbf{C}^1(\Omega)$ функций $u(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$u(x, y) = G(x, y) \; \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

где $G(x, y)$ некоторая заданная и непрерывная на $\partial\Omega$ функция.

В сделанных предположениях оказывается справедливой

Теорема 7.2.2 **Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция** $u^*(x,y) \in \mathbf{C}^1_G(\Omega)$ **является слабым экстремумом для функционала (7.2.6), то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера – Остроградского*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \kappa} = 0 \ , \qquad (7.2.7)$$

где $\eta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\kappa = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, **а** $\dfrac{\partial}{\partial x}$ **и** $\dfrac{\partial}{\partial y}$ **– операторы** *полных* **частных производных.**

Задачи вариационного исчисления с граничными условиями обобщенного вида

Рассмотрим возможное обобщение постановки простейшей вариационной задачи для следующего частного случая.

Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. И пусть $y(x)$ принадлежит $\mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ – множеству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций таких, что $y(a) = A$.

Определение 7.3.1

Задача отыскания слабого экстремума (то есть, поиска функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ с $y^*(a) = A$) функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx \qquad (7.3.1)$$

называется *задачей со свободным концом.*

Данное название отражает тот факт, что искомая функция при $x = b$ может иметь любое значение.

Необходимое условие оптимальности для задачи со свободным концом дает

Теорема 7.3.1 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция** $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a,b]$ **есть решение задачи со свободным концом, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0\ . \tag{7.3.2}$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение задачи 7.3.1 (задачи со свободным концом), то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in \mathcal{C}^1_{0-}[a, b]$, то есть такой, что $h(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ и $h(a) = 0$.

Используя теорему Лейбница и рассуждая как при доказательстве теоремы 7.1.2, получаем

$$0 = \left. \frac{dJ(y^* + \alpha h)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left. \left(\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} h'(x) \right) \right|_{y=y^*} dx \ .$$

Второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям. Тогда, с учетом $h(a) = 0$, приходим к равенству

$$\left. \frac{\partial F\,(x, y, y')}{\partial y'}\, h(x) \right|_{x=b} + \int\limits_a^b \left. \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right|_{y=y^*} h(x)\, dx = 0.$$

Последнее равенство должно выполняться при любых $h(x) \in \mathcal{C}^1_{0-}[a, b]$, в том числе и для таких, что $h(b) = 0$. Тогда по основной лемме вариационного исчисления получаем, что для $y^*(x)$ справедливо уравнение Эйлера, а необходимое условие принимает вид

$$\left. \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} \right|_{x=b} h(b) = 0 \ ,$$

что в силу произвольности $h(b)$ приводит к равенству (7.3.2).

Теорема доказана.

Условные вариационные задачи

В большом числе практически важных вариационных задач дополнительные условия (сужающие множество допустимых вариаций) не сводятся лишь к модификации оптимизируемого функционала или граничных условий, а являются ограничениями более общего вида примером которых служит *изопериметрическая задача.*

Приведем возможную постановку изопериметрической задачи. Пусть функции $F(x, y, p)$ и $G(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x \in [a, b]$ и $y\,;\,p \in (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала по $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{7.4.1}$$

при условии

$$H(y) = \int\limits_a^b G(x, y(x), y'(x))\,dx = l\ , \tag{7.4.2}$$

где A, B и l – заданные числа. Уравнение (7.4.2) принято называть *условием связи*, а функционал (7.4.1) – *целевым функционалом.*

Метод решения изопериметрической задачи – отыскания локального слабого экстремума функционала (7.4.1) – при условии (7.4.2), является аналогом метода множителей Лагранжа для задачи на условный экстремум функций многих переменных. Его основой служат функция Лагранжа

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x)) \ , \quad \lambda \in R$$

и

Теорема 7.4.1 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$ есть решение изопериметрической задачи и вариация $\delta H(y^*, h) \neq 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, тогда найдется такое λ, что $y^*(x)$ удовлетворяет** *уравнению Эйлера* **следующего вида**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \ .$$

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что если $h_0(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$, то $\delta H(y^*, h_0) \neq 0$. Рассмотрим функционалы

$$u(\alpha, \alpha_0) = J(y^*(x) + \alpha h(x) + \alpha_0 h_0(x)) \,,$$

$$v(\alpha, \alpha_0) = H(y^*(x) + \alpha h(x) + \alpha_0 h_0(x))$$

как функции от параметров α и $\alpha_0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

К этим функциям применимы известные теоремы о непрерывности и дифференцируемости собственных интегралов, зависящих от параметров и дающие равенства:

$$u(0,0) = J(y^*) \;, \quad \frac{\partial u(0,0)}{\partial \alpha} = \delta J(y^*, h) \;, \quad \frac{\partial u(0,0)}{\partial \alpha_0} = \delta J(y^*, h_0) \;;$$

$$v(0,0) = H(y^*)\ , \quad \frac{\partial v(0,0)}{\partial \alpha} = \delta H(y^*, h)\ , \quad \frac{\partial v(0,0)}{\partial \alpha_0} = \delta H(y^*, h_0)\ .$$

Их следствие – необходимое условие экстремальности $y^*(x)$, вытекающее из необходимого условия в задачах на условный экстремум – можно записать (покажите это самостоятельно) в виде тождества

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\alpha_0)}\right|_{\alpha=\alpha_0=0} \equiv 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b].$$

Последнее равенство можно преобразовать следующим образом.

$$\left| \begin{array}{cc} \delta J(y^*, h) & \delta H(y^*, h) \\ \delta J(y^*, h_0) & \delta H(y^*, h_0) \end{array} \right| \equiv 0$$

или
$$\delta J(y^*, h) - \frac{\delta J(y^*, h_0)}{\delta H(y^*, h_0)} \delta H(y^*, h) \equiv 0\ .$$

В нашем случае $\delta H(y^*, h_0) \neq 0$, поэтому существует конечное $\lambda = -\dfrac{\delta J(y^*, h_0)}{\delta H(y^*, h_0)}$ такое, что

$$\delta J(y^*, h) + \lambda \delta H(y^*, h) \equiv 0 \,,$$

или же, в интегральной форме

$$\int\limits_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} \right) h + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right) h' \right] \Bigg|_{y=y^*} dx \equiv 0 \,, \tag{7.4.3}$$

поскольку

$$\delta H(y, h) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y} h + \frac{\partial G}{\partial y'} h' \right) dx \,.$$

Проинтегрировав по частям в (7.4.3) слагаемое с $h'(x)$ и применив основную лемму вариационного исчисления (лемму 7.1.1), получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Проиллюстрируем применение этой теоремы следующими примерами.

Задача 7.4.2 Среди непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a, b]$ функций $y(x) \geq 0$ таких, что $y(a) = y(b) = 0$ и имеющих график длины L, найти те, у которых на этом промежутке площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью Ox, максимальна.

Решение. Лагранжев функционал в рассматриваемой задаче будет

$$L(x, y, y', \lambda) = J(x, y, y') + \lambda H(x, y, y') =$$

$$= \int\limits_a^b y(x)\,dx + \lambda \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int\limits_a^b \Big(y(x) + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \Big)\,dx\,.$$

Для этого функционала уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0\,,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x-C_1}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = \frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}} \, .$$

Откуда окончательно получаем, что

$$(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2 \, .$$

Поскольку система координат ортонормированная, то полученное уравнение, определяющее искомую функцию $y(x)$, есть уравнение окружности радиуса $|\lambda|$ с центром в точке $A(C_1,\, C_2)$ и проходящей через точки с координатами $(a,\, 0)$ и $(b,\, 0)$. См. рис. 1.

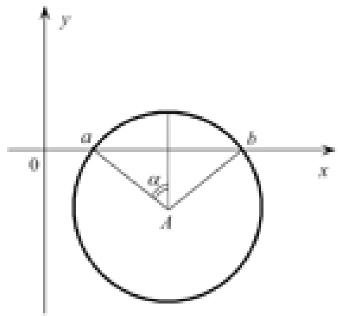

Рис. 1. К решению задачи 7.4.2.

Условия $y(a) = y(b) = 0$, записанные в виде

$$\begin{cases} (a - C_1)^2 & + & C_2^2 & = & \lambda^2 , \\ (b - C_1)^2 & + & C_2^2 & = & \lambda^2 , \end{cases}$$

дают $C_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Пусть угол $\angle aAb$ равен 2α. Тогда в силу свойств окружности (известных из курса элементарной геометрии) будет справедливо равенство:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{b-a}{L}.$$

Поскольку это уравнение (в условиях задачи) всегда однозначно разрешимо относительно α, то значения параметров λ и C_2 также однозначно могут быть найдены из соотношений

`Решение получено.`

$$\lambda = \frac{2\alpha}{L} \qquad \text{и} \qquad C_2 = \lambda\cos\alpha .$$

В заключение отметим, что использование определения экстремума функционала в задачах вариационного исчисления может иметь ограниченную применимость.

Проиллюстрируем эту особенность задач вариационного исчисления следующим примером.

Теорема 7.5.3 (Неравенство Виртингера)	**Пусть функция** $h(x)$ – **непрерывна на** $[0,\pi]$**,** – $h(0)=h(\pi)=0$ **и** – **имеет производную с интегрируемым квадратом на** $(0,\pi)$, **тогда справедливо неравенство**

$$I=\int\limits_{0}^{\pi}\Big(h'^2(x)-h^2(x)\Big)\;dx\geq 0\,. \qquad (7.5.6)$$

Доказательство.

Продолжим функцию $h(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ нечетным образом. Тогда разложения в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе для функций $h(x)$ и $h'(x)$ будут

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx \qquad \text{и} \qquad h'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, b_k \cos kx\,,$$

причем, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_{-\pi}^{\pi} h^2(x)\, dx = \pi \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} h'^2(x)\, dx = \pi \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2\,.$$

Функции $h^2(x)$ и $h'^2(x)$ четные по построению, поэтому

$$I = \int_0^{\pi} \Big({h'}^2(x) - h^2(x) \Big)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Big({h'}^2(x) - h^2(x) \Big)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\big(k^2 - 1\big)\, b_k^2 \Big) \geq 0\,,$$

поскольку $k \geq 1$.

Теорема доказана.

Таким образом, тот факт, что подынтегральная функция представима в виде *разности* полных квадратов, вообще говоря не позволяет сделать заключение об отсутствии у функционала знаковой определенности – в данном примере функции $h(x)$ и $h'(x)$ не являются независимыми.