

Линейные уравнения в частных производных первого порядка

В приложениях достаточно часто возникают дифференциальные уравнения, неизвестные в которых являются функциями от нескольких переменных.

При этом, если такие уравнения содержат частные производные от неизвестных порядка не выше первого, то (как будет показано ниже) их решения сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому традиционно изучаются в курсах, аналогичном нашему.

Пусть в некоторой области $G \subseteq E^{2n+1}$, $n \geq 2$ определена действительная непрерывно дифференцируемая функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

такая, что в каждой допустимой точке $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)^2 \neq 0$. Тогда можно дать

Определение
6.5.1

Уравнение вида

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (6.5.1)$$

называется *уравнением в частных производных первого порядка* относительно неизвестной функции $u = u(x)$, $x \in \Omega \subseteq E^n$, где

$$\|x\| = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^T.$$

Определение
6.5.2

Функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *решением* уравнения (6.5.1), если

1°. $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в Ω .

2°. $\forall x \in \Omega$ точка

$$\left\| x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|^T \in G.$$

3°. $\forall x \in \Omega$

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \equiv 0.$$

Среди уравнений вида (6.5.1) важную для приложений роль играют их специальные частные случаи: *линейные* и *квазилинейные* уравнения.

К линейным уравнениям в частных производных первого порядка относят уравнения вида

$$A_0(x_1, x_2, \dots, x_n)u + \sum_{k=1}^n A_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

а *квазилинейными* называют уравнения

$$\sum_{k=1}^n A_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Как легко видеть к линейным относятся уравнения, в запись которых неизвестная функция и ее производные входят линейно, а для квазилинейных уравнений линейность имеется лишь по производным.

Важно: в обоих случаях предполагается, что известные функции $A_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $A_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ удовлетворяют в Ω и в G соответственно условиям:

$$\sum_{k=1}^n A_k^2(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n A_k^2(x, u) \neq 0.$$

Приступим теперь к рассмотрению методов решения уравнений (6.5.1).

Поскольку алгоритмы решений для разных классов этих уравнений базируются на идеях, аналогичных друг другу, рассмотрим подробно метод решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\sum_{k=1}^n A_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0, \quad (6.5.2)$$

где $A_k(x) \forall k = [1, n]$ – известные непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что $\sum_{k=1}^n A_k^2(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию $A(x)$

$$\|A(x)\| = \|A_1(x_1, \dots, x_n) \ A_2(x_1, \dots, x_n) \ \dots \ A_n(x_1, \dots, x_n)\|^T.$$

Тогда уравнение (6.5.2) можно записать в неразвернутом матричном виде как

$$\|A(x)\|^T \operatorname{grad} u(x) = 0.$$

Определение
6.5.3

Автономная система

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A(x)\| \quad (6.5.3)$$

называется *характеристической системой* для уравнения (6.5.2), а ее фазовые траектории – *характеристиками* этого уравнения.

Связь между решением уравнения (6.5.2) и решением его характеристической системы (6.5.3) описывает

Теорема 6.5.1 В некоторой окрестности каждой неособой точки $x_0 \in \Omega$ общее решение уравнения (6.5.2) имеет вид

$$u(x) = \Phi \left(u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \dots, u_{(n-1)}(x) \right),$$

где $u_{(k)}(x), k = [1, n - 1]$ – функционально независимые в x_0 первые интегралы системы (6.5.3), а $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n - 1$ переменных.

Доказательство.

1°. По теореме 6.4.1 каждое решение уравнения (6.5.2) является первым интегралом его характеристической системы (6.5.3), поскольку из (6.5.2) следует, что производная этого решения в силу системы (6.5.3) оказывается равной нулю.

2°. Согласно пункту 2° теоремы 6.4.3 для $u(x)$ любого первого интеграла характеристической системы (6.5.3) в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Omega$ существует множество, состоящее из $n - 1$ функционально независимых первых интегралов $\{ u_{(1)}(x), u_{(2k)}(x), \dots, u_{(n-1)}(x) \}$ такое, что

$$u(x) = \Phi (u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \dots, u_{(n-1)}(x)) ,$$

где $\Phi (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n - 1$ переменной.

Теорема доказана.

Заметим также, что для решения уравнения вида

$$\sum_{k=1}^n A_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

можно применить алгоритм решения уравнения (6.5.2), если принять за неизвестную функцию

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) - u,$$

увеличив размерность задачи на единицу и записав уравнение в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial x_k} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$$

Поскольку в этом случае $\frac{\partial v}{\partial u} = -1$.

Таким образом можно заключить, что общее решение однородного уравнения в частных производных первого порядка содержит в своей записи произвольную, непрерывно дифференцируемую функцию, зависящую от $n-1$ переменной, в то время как, например, общее решение векторного обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t, x)$ выражается через n произвольных постоянных.

Для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка правило записи общего решения полностью аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений: общее решение неоднородного уравнения есть общее решение однородного, сложенного с частным (любым!) решением неоднородного.

Выделение конкретного частного решения из общего для уравнений в частных производных осуществляется путем задания дополнительных условий: начальных, краевых, смешанных и т. д.

Рассмотрим в качестве примера *задачу Коши* для уравнения (6.5.2).

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $s(x)$, $x \in \Omega \subseteq E^n$ такова, что $\text{grad } s(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$. Тогда уравнение $s(x) = 0$ задает в Ω гладкую гиперповерхность γ , называемую *начальной поверхностью*. И пусть на этой начальной поверхности задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$. Теперь мы можем дать

Определение
6.5.4

Задачей Коши называется задача отыскания $u(x)$ – такого решения уравнения

$$\|A(x)\|^T \|\text{grad } u(x)\| = 0, \quad (6.5.4)$$

для которого $u(x) \Big|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$.

Задача Коши для линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка, в отличие от случая обыкновенных линейных уравнений первого порядка, обладает следующими особенностями:

во-первых, ее решение существует и единственно не для любой гладкой начальной поверхности γ .

во-вторых, ее разрешимость имеет локальный характер.

Для уточнения условий однозначной разрешимости задачи Коши дадим

Определение 6.5.5	<i>Характеристической точкой задачи Коши вида (6.5.4) называется точка $x_0 \in \gamma$ такая, что</i> $\dot{s}(x_0) = \ A(x_0)\ ^T \ \text{grad } s(x_0)\ = 0.$
----------------------	---

Сравнение определений 6.5.4 и 6.5.5 дает следующую геометрическую интерпретацию: в характеристической точке вектор $A(x_0)$ касается поверхности γ .

При этом оказывается справедливой

Теорема 6.5.2 Если точка $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то в $\omega \subset \Omega$ – некоторой окрестности x_0 – решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство.

Поскольку $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то $A(x_0) \neq o$. Тогда в ω – некоторой окрестности x_0 – существует $n - 1$ функционально независимый первый интеграл характеристической системы (6.5.3)

и общее решение уравнения (6.5.4) есть

$$u(x) = \Phi (u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \dots, u_{(n-1)}(x)) .$$

Начальное условие $u(x) \Big|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$ однозначно определяет в ω вид функции $\Phi (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$.

Что бы убедиться в этом, вначале покажем, что в ω к системе уравнений

$$\begin{cases} u_{(k)}(x) = C_k, & k = [1, n - 1], \\ s(x) = 0 \end{cases} \quad (6.5.5)$$

применима (известная из курса математического анализа) теорема *о системе неявных функций*.

Поскольку все функции, входящие в условие системы (6.5.5) непрерывно дифференцируемы в ω , то для доказательства однозначной разрешимости (6.5.5) достаточно показать, что якобиан

$$J = \frac{\partial (u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n-1)}, s)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)} \Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

Если предположить противное, то есть что $J = 0$, то из функциональной (а, значит, и линейной) независимости первых $n - 1$ строк матрицы Якоби следует, что последняя ее строка есть нетривиальная линейная комбинация остальных строк. Значит

$$\frac{\partial s}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k}.$$

Найдем в этом случае значение $\dot{s}(x)$ – производной в силу системы (6.5.3) – при $x = x_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n A_k \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \dot{u}_{(j)} = 0, \end{aligned}$$

поскольку все $u_{(j)}(x)$, $j = [1, n - 1]$ суть первые интегралы характеристической системы (6.5.3).

Этот результат противоречит условию доказываемой теоремы о том, что x_0 не характеристическая точка задачи Коши. Поэтому $J \neq 0$, теорема о системе неявных функций применима в рассматриваемом случае и в окрестности ω существует единственное непрерывно дифференцируемое решение системы (6.5.5) $x = f(u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n-1)})$.

Наконец, $\forall x \in \gamma \cap \omega$ справедливо равенство

$$\varphi(x) = \varphi(f(u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n-1)})) = \Psi(u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n-1)}) .$$

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $f(u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n-1)})$ известны, то функция

$$u(x) = \Psi(u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \dots, u_{(n-1)}(x)) ,$$

являющаяся решением задачи Коши в ω , также известна и единственна.

Теорема доказана.

Теперь продемонстрируем особенности практического использования полученных теоретических результатов.

Задача Найти общее решение уравнения
6.5.1

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y(z-x) \frac{\partial u}{\partial y} - z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием

$$u = y \quad \text{при} \quad x = z.$$

Решение. 1°. Для данного уравнения в частных производных составляем характеристическую систему в симметричной форме

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} = -\frac{dz}{z^2}.$$

2°. Один из двух функционально независимых первых интегралов находим так

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = C_1.$$

3°. Другой первый интеграл попробуем найти из уравнения

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} \quad \text{или} \quad \frac{z-x}{x^2} dx = \frac{dy}{y}.$$

С учетом $z = \frac{x}{C_1x - 1}$ - условия связи, следующего из уже найденного первого интеграла, получаем

$$\left(\frac{1}{x(C_1x - 1)} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{dy}{y}.$$

Разложение первого слагаемого в больших скобках дает

$$\frac{1}{x(C_1x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{C_1x - 1} \quad \Rightarrow \quad A = -1; B = C_1.$$

Откуда

$$-\frac{2}{x} dx + \frac{C_1}{C_1x - 1} dx = \frac{dy}{y},$$
$$-\ln x^2 + \ln |C_1x - 1| = \ln |y| + \ln |\tilde{C}_2|.$$

Поэтому $\frac{C_1x - 1}{x^2y} = C_2$, что, с учетом равенства $z = \frac{x}{C_1x - 1}$, окончательно дает $\frac{1}{xyz} = C_2$.

Найденные первые интегралы очевидно функционально независимы, поскольку формула для одного из них содержит независимую переменную y , а для другого – нет. Таким образом, в силу теоремы 6.5.1, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \Phi \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}, xyz \right).$$

4°. Рассмотрим теперь задачу Коши.

Отметим, что в данной задаче $\varphi(x, y, z) = y$, а начальная поверхность γ это плоскость $x - z = 0$, то есть $s(x, y, z) = x - z$.

Составим вначале вспомогательную систему уравнений (6.5.5), включающую формулы первых интегралов и уравнение, задающее начальную поверхность

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = C_1, \\ xyz = C_2, \\ x - z = 0. \end{cases} \quad (6.5.6)$$

Конкретный вид функции Ψ , дающей решение задачи Коши, можно найти, если при помощи вспомогательной системы (6.5.6) выразить независимые переменные через C_1 и C_2 и подставить эти выражения в формулу начальной поверхности.

Действительно, из системы (6.5.6) получаем

$$\begin{cases} x = \frac{2}{C_1}, \\ y = \frac{C_1^2 C_2}{4}, \\ z = \frac{2}{C_1}. \end{cases}$$

Первые интегралы (равно как и любые непрерывно дифференцируемые функции от них) сохраняют постоянные значения на траекториях характеристической системы.

Поэтому те условия связи между первыми интегралами, которые имеют место на *начальной* поверхности, остаются верными и при движении вдоль траекторий.

В нашем случае на начальной поверхности

$$u(x, y, z) = y = \frac{C_1^2 C_2}{4},$$

поэтому решением задачи Коши будет функция

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 xyz}{4} = \frac{(x+z)^2 y}{4xz}.$$

Решение
получено.