Автономные системы уравнений и их свойства

Определение 6.1.1

Нормальной автономной системой дифференциальных уравнений порядка $n \geq 2$ с неизвестной вектор-функцией $x(t),\ t \in T$, называется система уравнений вида

$$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x \in \Omega \subseteq E^n\ , \tag{6.1.1}$$

где вещественная вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы 4.3.1 (Коши) на множестве Ω, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Согласно данному определению независимая переменная t в условие автономной системы явно не входит, а решение задачи Коши для (6.1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует и единственно при любых согласованных $t_0 \in T$ и $x_0 \in \Omega$.

При этом отметим, что любая система вида $\dot{x} = F(t,x)$ может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной $x_{n+1}(t) = t$. Координатная форма системы (6.1.1) в этом случае пополняется $(n+1)$-м уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$ и принимает автономный вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = F_k(x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall\, k = [1, n]\,, \\ \\ \dot{x}_{n+1} = 1\,. \end{cases}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принято называть *фазовыми переменными.*

Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (6.1.1), тогда вектор-функция $x(t),\ t \in T$, параметрически задает некоторую линию в E^n, называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (6.1.1).

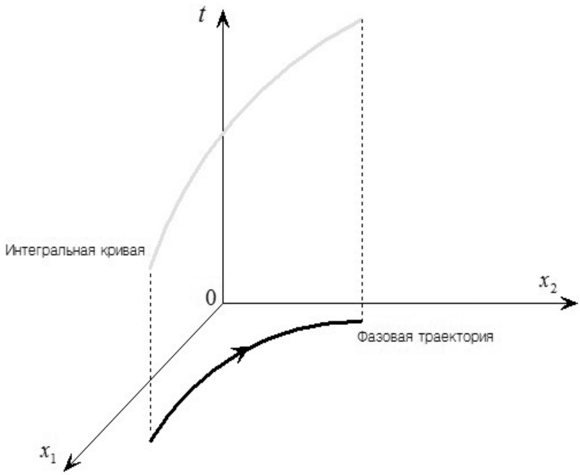

Рис. 1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Заметим, что фазовая траектория и интегральная кривая суть различные способы наглядного представления решений системы (6.1.1), поскольку они образованы точками пространств разных размерностей: n-мерного фазового пространства и $(n+1)$-мерного пространства, образованного векторами с координатными представлениями вида $\| t, x_1, x_2, \ldots, x_n \|^{\mathrm{T}}$ (см. рис. 6.1).

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании переменной t.

П р и м е р 6.1.1 : для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 \end{cases}$$

каждая интегральная кривая есть в $E^3\{\,t, x_1, x_2\}$ винтовая (или прямая при $C_1 = 0$) линия

$$\begin{cases} x_1 = C_1\cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1\sin(t + C_2), \end{cases}$$

в то время как фазовые траектории являются в $E^2\{x_1, x_2\}$ окружностями (или точкой при $C_1 = 0$) вида $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$. Причем для каждой фазовой траектории с конкретным значением C_1 имеется бесконечно много интегральных кривых с различными значениями C_2.

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

Теорема 6.1.1 **Если вектор-функция $x(t)$ есть решение автономной системы (6.1.1) при $t \in T$, то вектор-функция $x(t+c)$ (где c такая константа, что $t+c \in T$) также является решением системы (6.1.1) при всех допустимых t.**

Доказательство

Следует непосредственно из равенств

$$\frac{dx(t+c)}{dt} = \frac{dx(t+c)}{d(t+c)} = F(x(t+c)) \ .$$

Теорема доказана.

Теорема 6.1.2 **Если фазовые траектории решений $x(t),\ t \in T_1$ и $y(t),\ t \in T_2$, автономной системы (6.1.1) имеют общую точку $b = x(t_1) = y(t_2)$, то $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$ для всех t, при которых определены обе части последнего тождества.**

Доказательство

Вектор-функция $z(t) = x(t + t_1 - t_2)$ в силу теоремы 6.1.1 является решением системы (6.1.1) для всех t таких, что

$$t + t_1 - t_2 \in T_1.$$

Кроме того,

$$z(t_2) = x(t_1) = b = y(t_2)\,.$$

Тогда по теореме единственности $z(t) \equiv y(t)$ для всех t, при которых обе части этого тождества определены.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 6.1.2 означает, что фазовые траектории автономных систем в окрестности точек, в которых выполняется теорема Коши, либо не имеют общих точек, либо совпадают. Поэтому вектор-функцию $F(x)$ можно рассматривать в области Ω как задающую векторное поле *фазовых скоростей*, каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку $x \in \Omega$.

Для точек с нулевой фазовой скоростью используется

Определение 6.1.2	*Положением равновесия* или *точкой покоя* [1] системы (6.1.1) называется ее решение вида $$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in T$$ такое, что $F(x_0) = o$.

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (6.1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве E^n, а соответствующая этому решению интегральная кривая в E^{n+1} есть прямая, параллельная оси Ot. Из определения 6.1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (6.1.1) сводится к решению конечной (недифференциальной) системы уравнений $F(x_0) = o$.

Наконец, из вышесказанного следует, что *неособое решение* не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных t. Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

[1] Используются также термины *особое решение* или *стационарное решение.*

Теорема 6.1.3 **Пусть $x(t)$, $t \in T$, – неособое решение системы (6.1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда $x(t)$ – периодическая функция.**

Доказательство

В силу условий теоремы Г – фазовая траектория, отвечающая решению $x(t)$, есть гладкая замкнутая линия в E^n, длина элемента дуги которой равна

$$dL = |dx| = |\dot{x}(t)|dt = |F(x(t))|dt\,.$$

Рассмотрим γ – некоторую дугу линии Г, начинающуюся в точке $x(0)$. В силу теоремы 6.1.1 для каждой ее точки остается справедливым равенство (6.1.1). В этом случае длина дуги γ для $t \in (0, \tau)$ при $\tau > 0$ определяется формулой

$$L(\tau) = \int\limits_0^\tau |F(x(t))|dt\ .$$

Покажем, что $\exists P^* > 0 :\ x(P^*) = x(0)$, то есть P^* — период. Поскольку точки линии Г в своей совокупности образуют ограниченное и замкнутое множество, то для непрерывной на этом множестве функции $|F(x)|$ существуют числа m и M такие, что

$$0 < m \le |F(x)| \le M < +\infty\ ,$$

а по свойствам определенного интеграла: $m\tau \le L(\tau) \le M\tau$.

Из неравенства $m\tau \le L(\tau)$ следует, что монотонно возрастающая функция $L(\tau)$ стремится к $+\infty$ при $\tau \to +\infty$.

Поскольку гладкая линия Г замкнутая, она имеет ограниченную длину, которую обозначим L^*. В этом случае при малых $\tau > 0$:

$$L(\tau) \le M\tau < L^*,$$

ибо дуга γ является (например при $\tau < L^*/M$) частью Г .

Поэтому существует (а в силу монотонности и непрерывности $L(\tau)$ единственное) число $P^* > 0$, являющееся решением уравнения

$$L(P) = L^* \qquad \text{или} \qquad \int\limits_0^P |F(x(t))| dt = L^* \ .$$

При $P = P^*$ линия γ совпадает с Γ, и $x(P^*) = x(0)$. Значит, число $P^* > 0$ – наименьший положительный период вектор-функции $x(t)$.

Теорема доказана.

Из теорем 6.1.1 – 6.1.3 вытекает

Следствие 6.1.1 **Каждая фазовая траектория автономной системы (6.1.1) является либо точкой, либо незамкнутой линией или замкнутой линией без самопересечений.**

Доказательство

Действительно, незамкнутая траектория, очевидно, не имеет точек самопересечения. В случае замкнутой фазовой траектории точек самопересечения также быть не может, поскольку из равенства $x(t_1) = x(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [0, P^*]$ и $|t_2 - t_1| < P^*$ следует, что решение $x(t)$ имеет период $P^{**} = |t_2 - t_1| < P^*$, что невозможно, поскольку P^* — наименьший положительный период.

Следствие доказано.

Групповое свойство автономной системы (6.1.1) описывает

Теорема 6.1.4 **Пусть $x(t, a)$ есть решение задачи Коши следующего вида $\dot{x} = F(x),\ x(0) = a$. Тогда**

$$x(t, x(t_0, a)) \equiv x(t + t_0, a)$$

для любых допустимых t и t_0.

Доказательство

Вектор-функции $x(t, x(t_0, a))$ и $x(t + t_0, a)$ при $t = 0$ равны вектору $x(t_0, a)$. По теореме единственности они совпадают для всех допустимых значений t и t_0.

Теорема доказана.

Следует отметить, что исследование поведения фазовых траекторий системы (6.1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства *единообразно* выполнить удается, вообще говоря, не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия (соответствующие случаи будут рассмотрены в последующих параграфах). Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем.

Пусть формулы $x = g(y) \;\; \forall\, y \in \Theta \subset E^n$, $x \in \Omega \subset E^n$, задают замену переменных $\{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,\}$ на $\{\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,\}$. Напомним

Определение 6.1.3	Замена переменных $x = g(y)$ называется *гладкой обратимой* в Θ, если 1° преобразование $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает Θ в Ω; 2° иектор-функции $x = g(y)$ и обратная к ней $y = g^{-1}(x) = h(x)$ непрерывно дифференцируемы на множествах Θ и Ω соответственно; 3° якобиан $$\frac{\partial\,(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,)}{\partial\,(\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,)} \neq 0 \quad \forall y \in \Theta\,.$$
Определение 6.1.4	Замена переменных $y = h(x)$ называется *обратной* к замене $x = g(y)$.

Замена переменных, обратная к гладкой и обратимой, также гладкая и обратимая в силу определений 6.1.3 и 6.1.4.

Будет справедлива

Теорема 6.1.5 (О выпрямлении траекторий) **В малой окрестности точки $a \in \Omega \subseteq E^n$, не являющейся положением равновесия, система (6.1.1) может быть приведена к виду**

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases} \qquad (6.1.2)$$

некоторой гладкой обратимой заменой $x = g(y)$.

Доказательство

Поскольку a не является положением равновесия для системы (6.1.1), то существует $\Omega \subseteq E^n$ – некоторая окрестность точки a, в которой $F(x) \neq o \;\; \forall x \in \Omega$.

Без потери общности можно считать, что вектор $F(x)$ имеет хотя бы одну ненулевую компоненту, и у этой компоненты индекс равен n.

Рассмотрим для системы (6.1.1) задачу Коши с начальным условием следующего специального вида $x(t_0) = a$. Пусть непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x = \varphi(t)$ есть решение этой задачи Коши, фазовая траектория которого проходит через точку a при $t = t_0$.

Далее мы будем использовать компоненты вектора a с индексами $\{1, 2, \ldots n-1\}$ как произвольные константы со значениями $\{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\}$, а n-ю компоненту вектора x будем рассматривать в качестве u – новой (вместо t) независимой переменной.

Используя обозначения

$$\left\| \vec{A} \right\| = \left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{array} \right\| \qquad \text{и} \qquad x_n = u\,,$$

покажем, что искомая замена $x = g(y)$ может быть определена равенствами:

$$\left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} x_1 - \varphi_1\Big(t(u)\Big) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2\Big(t(u)\Big) + a_2 \\ \qquad\qquad \dots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}\Big(t(u)\Big) + a_{n-1} \\ u \end{array} \right\| , \quad (6.1.3)$$

где функция $t(u)$, реализующая замену независимой переменной t на u, есть решение вспомогательной задачи Коши:

$$\frac{d\,t}{du} = \frac{1}{F_n(\vec{A}, u)} \qquad t(a_n) = t_0 \ , \qquad (6.1.4)$$

которое в сделанных предположениях существует и единственно.

Найдем теперь вид системы (6.1.1) в новых переменных $\{\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_n\}$.

В силу (6.1.3) и (6.1.4) $\forall\ k = 1, 2, \dots, n-1$ на фазовой траектории $x = \varphi(t)$, удовлетворяющей (6.1.1), будут справедливы равенства

$$\frac{dy_k}{du} = \left(\frac{dx_k}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt} \right) \frac{dt}{du} = \Big(\dot{\varphi}_k(t) - F_k(\varphi(t)) \Big) \frac{1}{F_n(x)} = 0\,. \qquad (6.1.5)$$

Кроме того, из условия $y_n(u) = u$ получаем $\dfrac{dy_n}{du} = 1$, а это в совокупности с равенствами (6.1.5) означает, что в переменных $\{\, y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n \,\}$ система (6.1.1) имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Теперь остается доказать, что замена, определяемая соотношениями (6.1.3), гладкая и обратимая. Для этого достаточно установить факт невырожденности матрицы Якоби при данной замене.

Запишем соотношения (6.1.3) в следующем виде, заменив u на x_n :

$$\left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} x_1 - \varphi_1\Big(t(x_n)\Big) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2\Big(t(x_n)\Big) + a_2 \\ \qquad\qquad \dots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}\Big(t(x_n)\Big) + a_{n-1} \\ x_n \end{array} \right\| . \tag{6.1.6}$$

В данном случае якобиан замены переменных

$$\{\, x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n \,\} \longrightarrow \{\, y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n \,\} \tag{6.1.7}$$

в силу (6.1.6), $F_n(x) \neq 0$ и соотношений

$$\frac{dy_k}{dx_n} = -\frac{d\varphi_k\big(t(x_n)\big)}{d\,t} \cdot \frac{d\,t}{dx_n} = -\frac{F_k(x)}{F_n(x)} \qquad \forall\; k = 1, 2, \dots, n-1$$

равен

$$\frac{\partial(\, y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_n \,)}{\partial(\, x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n \,)} = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{F_1(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{F_2(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -\dfrac{F_3(x)}{F_n(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\dfrac{F_{n-1}(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right| = 1\,.$$

Таким образом, гладкая и обратимая замена переменных (6.1.7) приводит систему (6.1.1) к виду, указанному в формулировке теоремы.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что

1° при выбранной начальной точке a замена (6.1.7) может считаться известной, ибо существование и единственность непрерывно дифференцируемой вектор функции $x = \varphi(t)$ следует из теоремы Коши;

2° система (6.1.1) в переменных $\{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$ легко интегрируется. Ее фазовые траектории суть отрезки прямых

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_1 \, , \\ y_2(u) & = & a_2 \, , \\ & \ldots & \\ y_{n-1}(u) & = & a_{n-1} \, , \\ y_n(u) & = & u + C \end{array} \right.$$

что оправдывает название теоремы;

3° практическое значение теоремы 6.1.5 ограничено тем обстоятельством, что замена (6.1.7) для каждой точки a своя. Иначе говоря, построить эту замену единообразно для *немалого* множества Ω удается лишь в исключительных случаях.