Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка вида

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\acute{y}(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,, \tag{5.3.1}$$

где $a_k(t)$ и $b(t)$ непрерывны $\forall k = [0, n] \quad \forall t \in \Omega$ и $a_n(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Omega\,.$

Оно всегда может быть сведено при помощи следующей замены переменных:

$$x_1(t) = y(t)\,, \quad x_2(t) = \dot{y}(t)\,, \quad x_3(t) = \ddot{y}(t)\ , \quad \ldots$$

$$\ldots\ \ , \quad x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t)\ , \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \tag{5.3.2}$$

к равносильной системе линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \acute{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ \acute{x}_2(t) = x_3(t)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \acute{x}_{n-1}(t) = x_n(t)\,, \\ \acute{x}_n(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}(t)}{a_n(t)} x_k(t) + \dfrac{b(t)}{a_n(t)}\,. \end{array} \right. \tag{5.3.3}$$

Или в матричном виде

$$\|\acute{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\| \ ,$$

где

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_1(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_2(t)}{a_n(t)} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\| ,$$

$$\|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t)/a_n(t) \end{array} \right\| \quad , \quad \|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} y(t) \\ \acute{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| .$$

Формулы (5.3.2) и (5.3.3) позволяют делать заключения о свойствах уравнений вида (5.3.1) и их решений, используя результаты, полученные в § 5.1–5.2 для систем линейных уравнений.

Основой для этого служит

Лемма 5.3.1

При замене переменных (5.3.2) линейно зависимые решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно зависимые решения системы (5.3.5), и наоборот.
Аналогично, при замене переменных (5.3.2) линейно независимые решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно независимые решения системы (5.3.5), и наоборот.

Теперь мы можем сформулировать для уравнения (5.3.1) утверждения, аналогичные доказанным ранее для систем (5.1.1). Так вид общего решения однородного уравнения (5.3.4) описывает

Теорема 5.3.1

Пусть функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ суть линейно независимые частные решения однородного уравнения (5.3.4). Тогда общее решение этого уравнения дается формулой

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_{(k)}(t) \, ,$$

где $C_1, C_2, \ldots , C_n$ – произвольные постоянные.

По аналогии с ранее данным определением будет уместным и

Определение 5.3.1	*Фундаментальным набором решений* уравнения (5.3.4) называется совокупность любых n его линейно независимых частных решений.

При этом будет иметь место

Теорема 5.3.2 **Для множества частных решений** *однородного* **уравнения (5.3.4) справедливы утверждения:**

1°. Фундаментальные наборы этого уравнения существуют.

2°. Общее решение уравнения (5.3.4) есть совокупность всевозможных линейных комбинаций фундаментального набора решений.

3°. Множество всех частных решений однородного уравнения (5.3.4) является линейным пространством размерности n, базисом в котором может служить любой фундаментальный набор решений.

Учитывая замену переменных (5.3.2), для уравнения (5.3.1) можно дать

Определение 5.3.2	*Вронскианом* набора $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ называется $$\det \left\| \begin{array}{cccc} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \ldots & y_{(n)}(t) \\ \acute{y}_{(1)}(t) & \acute{y}_{(2)}(t) & \ldots & \acute{y}_{(n)}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(t) & y_{(2)}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| ,$$ обозначаемый, как и раньше, $W(t)$.

Перечислим теперь свойства решений однородного уравнения (5.3.4), описываемые с помощью понятия вронскиана.

Теорема 5.3.3

Пусть функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ определены и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы $\forall t \in \Omega$ и $W(t)$ – их вронскиан. Тогда

1°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ линейно зависимы на Ω, то $W(t) \equiv 0$ на Ω.

2°. Если вронскиан $W(t) \not\equiv 0$ на Ω, то функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ линейно независимы на Ω.

3°. Пусть $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ суть частные решения однородного уравнения (5.3.4). Они линейно зависимы тогда и только тогда, когда и их вронскиан тождественно равен нулю, то есть $W(t) \equiv 0$ на Ω. Для их линейной независимости необходимо и достаточно, чтобы $W(t) \not\equiv 0$ на Ω, т. е. $\exists t_0 \in \Omega : W(t_0) \neq 0$.

4°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ частные решения однородного уравнения (5.3.4), то $\forall\ t_0, t \in \Omega$ справедлива формула Лиувилля–Остроградского

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)} du \right).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (5.3.1). Структуру его общего решения описывает

Теорема 5.3.4

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5.3.1) есть сумма *любого частного* **решения этого неоднородного уравнения и** *общего* **решения однородного уравнения (5.3.4).**

Как и в случае неоднородной системы (5.3.3), частное решение неоднородного уравнения может быть найдено методом *вариации постоянных.*

Теорема 5.3.5 **Пусть частные решения однородного уравнения (5.3.4)** $\{y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)\}$ **образуют фундаментальный набор, тогда неоднородное уравнение (5.3.1) имеет частное решение вида**

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, y_{(k)}(t)\,, \qquad (5.3.9)$$

где непрерывно дифференцируемые функции $C_k(t),\ k=[1,n]$ **определяются как квадратуры решений системы линейных уравнений**

$$\left\| \begin{array}{cccc} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \ldots & y_{(n)}(t) \\ \acute{y}_{(1)}(t) & \acute{y}_{(2)}(t) & \ldots & \acute{y}_{(n)}(t) \\ \ddot{y}_{(1)}(t) & \ddot{y}_{(2)}(t) & \ldots & \ddot{y}_{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)}_{(1)}(t) & y^{(n-1)}_{(2)}(t) & \ldots & y^{(n-1)}_{(n)}(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \acute{C}_1(t) \\ \acute{C}_2(t) \\ \acute{C}_3(t) \\ \ldots \\ \acute{C}_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \dfrac{b(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\| \qquad (5.3.10)$$

Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

В большинстве случаев решения линейного уравнения с переменными коэффициентами не выражаются даже в квадратурах.

Поэтому для практики важными оказываются косвенные методы, позволяющие делать заключения о свойствах таких решений без построения их явного вида, определяемого теоремой 5.3.4.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только *вещественных* функций вещественного переменного, что позволит более широко использовать неравенства для описания свойств решений.

Например, если для уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \tag{5.4.1}$$

имеем $a_0(t) > 0\,, t \in \Omega\,$, то (согласно известной из курса математического анализа теореме) можно утверждать, что при $y > 0$ график любого частного решения на Ω будет иметь выпуклость вверх, поскольку в этом случае

$$\ddot{y} = -a_0(t)y < 0\,.$$

Менее очевидные, но также практически полезные методы могут быть применены для исследования *нулей решений*, то есть значений независимой переменной t, для которых искомая функция принимает нулевое значение.

Далее будем рассматривать линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,, \tag{5.4.2}$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\quad t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0\,$.

Убедимся, что уравнение (5.4.2) может быть приведено к виду (5.4.1) при помощи линейной замены искомой функции по формуле $y(t) = p(t)u(t)$, где $u(t)$ – новая неизвестная функция, а

$$p(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_2(s)}\,ds\right) . \tag{5.4.3}$$

Действительно, если в уравнение (5.4.2) подставить $y(t) = p(t)u(t)$, то мы получим

$$\big(a_2 p\,\ddot{u} + 2a_2\dot{p}\,\dot{u} + a_2\ddot{p}\,u\big) + \big(a_1 p\,\dot{u} + a_1\dot{p}\,u\big) + a_0 p\,u = 0$$

или

$$a_2 p\,\ddot{u} + \big(2a_2\dot{p} + a_1 p\big)\dot{u} + \big(a_2\ddot{p} + a_1\dot{p} + a_0 p\big)u = 0\,,$$

то есть получаем уравнение, не содержащее слагаемого с $\dot{u}$, поскольку выбранная по формуле (5.4.3) функция $p(t)$ удовлетворяет легко проверяемому равенству $2a_2\dot{p} + a_1 p = 0$.