

Исследование зависимости решения задачи Коши от параметров

В реальных приложениях постановка задачи Коши может зависеть от некоторых параметров, значения которых a priori известны, но с некоторой, вообще говоря, ненулевой погрешностью. В этом случае важно убедиться в том, что малые вариации значений параметров приводят к малым вариациям решения. Данное свойство принято называть *корректностью* постановки задачи Коши. Найдем условия, гарантирующие наличие данного свойства.

Покажем, что справедливы следующие теоремы о гладкости, непрерывной зависимости и дифференцируемости решений задачи Коши по параметрам. Во-первых, имеет место

Теорема 4.5.1 (0 гладкости) Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывно дифференцируема в G по всем своим переменным до порядка $N \geq 1$. Тогда любое решение системы дифференциальных уравнений вида $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ имеет непрерывные производные порядка $N + 1$.

Доказательство

При $N = 1$ теорема верна в силу теоремы Коши. Применим к рассматриваемой системе теорему о дифференцируемости сложной функции. Получим

$$\vec{y}'' = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx}.$$

То есть существует непрерывная вторая производная от \vec{y} .

Пусть теперь $N = 2$. Снова применив к последнему равенству теорему о дифференцируемости сложной функции, придем к заключению о существовании непрерывной производной третьего порядка и т.д.

Теорема доказана.

Таким образом, чем выше степень гладкости правых частей исходной системы, тем выше степень гладкости ее решений.

Далее, будет справедлива

Теорема 4.5.2 (О непрерывности) Пусть p – скалярный параметр. Тогда если функции $\vec{f}(x, \vec{y}, p)$ и $\frac{\partial \vec{f}(x, \vec{y}, p)}{\partial y_i} \quad \forall i = [1, n]$ непрерывны в области G по совокупности всех своих аргументов, то $\vec{y}^*(x, p)$ – решение задачи Коши:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}, p), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

при $\|x_0 - \vec{y}_0 - p_0\|^T \in G$ непрерывно по совокупности переменных $\{x, p\}$ в некотором прямоугольнике

$$\Pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq \delta_r, \\ |p - p_0| \leq \delta_p. \end{array} \right\}$$

Доказательство

Рассматриваемую задачу Коши можно записать в следующем операторном виде

$$\vec{y} = \hat{\Phi}\vec{y}, \quad \text{где } \hat{\Phi}\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(u, \vec{y}, p) du .$$

Согласно теоремам 4.2.1 (*принцип сжимающих операторов*) и 4.3.1 (*Коши*) это уравнение имеет в некоторой замкнутой, ограниченной окрестности \vec{y}_0 в банаховом пространстве непрерывно дифференцируемых функций единственное решение.

Покажем теперь, что в силу сжимаемости оператора $\hat{\Phi}$ решение задачи Коши является непрерывной функцией p . Выберем $r > 0$ и δ_r так, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.3.1. В этом случае коэффициент сжатия оператора $\hat{\Phi}$ будет равен q_r . По следствию 4.3.1 из условия теоремы вытекает, что $\exists L > 0$ такое, что $q_r = \delta_r L$.

Из теоремы 4.2.1 следует, что рекуррентно-определенная вектор-функциональная последовательность с непрерывными членами

$$\vec{y}_{(k)}(x, p) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}\left(u, \vec{y}_{(k-1)}(u, p), p\right) du ,$$

$$\vec{y}_{(0)}(x, p) = \vec{y}_0, \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ p \end{array} \right\| \in \Pi,$$

сходится к $\vec{y}^*(x, p)$, причем (как следует из теоремы 4.2.1):

$$\langle \vec{y}_{(k)}(x, p) - \vec{y}^*(x, p) \rangle \leq (q_r)^k r, \quad \text{где } q_r = \delta_r L < 1.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса имеет место равномерная по p сходимость:

$$\vec{y}_{(k)}(x, p) \rightrightarrows \vec{y}^*(x, p), \quad \left\| \begin{array}{c} x \\ p \end{array} \right\| \in \Pi,$$

и из непрерывности по параметру p вектор-функций $\vec{y}_{(k)}(x, p) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$ следует непрерывность $\vec{y}^*(x, p)$.

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает условия дифференцируемости решения задачи Коши.

Теорема

4.5.3

(О диф-
ференци-
руемости)

Пусть в области G пространства $\{x, \vec{y}, p\}$ вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y}, p)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка $N \geq 1$ включительно.

Тогда решение задачи Коши $\vec{y}^*(x, p)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка N . При этом частная производная $\frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p}$ является решением задачи Коши для уравнения в вариациях по параметру p :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k^*}{\partial p} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial p}$$

$$\text{с начальным условием } \left. \frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p} \right|_{x=x_0} = \vec{o}.$$

Доказательство

Проведем доказательство для случая $n = 1$. Согласно теореме 4.5.1 функциональная последовательность $\{y_{(k)}(x, p)\}$ при $N = 1$:

$$y_{(k)}(x, p) = y_0 + \int_{x_0}^x f\left(u, y_{(k-1)}(u, p), p\right) du , \quad k = 1, 2, 3, \dots , \quad (4.5.1)$$

сходится равномерно на $p \in [p - p_0, p + p_0]$ к $y^*(x, p)$ – решению задачи Коши. При условии достаточной гладкости функции $y_0(x, p)$ и в силу свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом каждый ее член есть непрерывно дифференцируемая по p функция.

Используя теорему Лейбница, построим новую функциональную последовательность $w_{(k)}(x, p) = \frac{\partial y_{(k)}(x, p)}{\partial p}$, заданную рекуррентным соотношением

$$w_{(k)}(x, p) = \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial f}{\partial y} w_{(k-1)} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du , \quad (4.5.2)$$

где частные производные от f по y и p вычислены в точке $\| u \ y_{(k-1)}(u, p) \ p \|^\Gamma$. Или же в операторной форме

$$w_{(k)} = \hat{\Psi} w_{(k-1)} , \quad k = 1, 2, 3, \dots , \quad (4.5.3)$$

где действие оператора $\hat{\Psi}$ задается формулой

$$\hat{\Psi} w = \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial f}{\partial y} w + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du .$$

В силу условий доказываемой теоремы модуль подынтегральной функции в (4.5.2) ограничен сверху числом $M > 0$ на каждом замкнутом, ограниченном подмножестве в G . Кроме того, из следствия 4.3.1 вытекает, что эта подынтегральная функция удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L > 0$. Тогда, проведя рассуждения аналогичные доказательству теоремы 4.3.1, заключаем, что оператор $\hat{\Psi}$ есть сжимающий в некотором цилиндре

$$\overline{Q}_r \equiv \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq \delta_r, \\ |y - y_0| \leq r \end{array} \right\} \subseteq G,$$

где

$$\delta_r = \frac{r}{M + rL} \quad \text{и коэффициент сжатия} \quad \delta_r L = q_r < 1,$$

причем $\langle w_{(k)} - w^* \rangle \leq (q_r)^k r \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

Из последнего неравенства (по признаку Вейерштрасса) следует равномерная сходимость последовательности (4.5.3), что, в свою очередь, исходя из свойств равномерно сходящихся функциональных последовательностей, позволяет заключить, что $y^*(x, p)$ является непрерывно дифференцируемой функцией от p и неподвижной точкой $\widehat{\Psi}$ в \overline{Q}_r . Таким образом, будет справедливо соотношение

$$\frac{\partial y^*(x, p)}{\partial p} = \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y^*(u, p)}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) du,$$

продифференцировав по x обе части которого, получим при $\frac{\partial y^*}{\partial p} \Big|_{x=x_0} = 0$:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y^*}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}$$

Повторяя индуктивно приведенные выше рассуждения для бо́льших значений N , приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что доказательство теоремы 4.5.3 очевидным образом обобщается на случаи $n > 1$ и векторного параметра \vec{p} .

Наконец, также будет верной

Теорема 4.5.4 Если вектор-функция \vec{f} имеет в области G непрерывные частные производные по всем своим аргументам, то решение задачи Коши $\vec{y}^*(x, x_0, \vec{y}_0)$ (как функция начальных условий) будет непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности x_0 по аргументам x, x_0, \vec{y}_0 .

Доказательство

Сделаем замену переменных: $u = x - x_0$, $\vec{z} = \vec{y} - \vec{y}_0$. Тогда исходная задача Коши:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (4.5.4)$$

примет вид

$$\vec{z}' = \vec{f}(u + x_0, \vec{z} + \vec{y}_0), \quad \vec{z}(0) = \vec{o}$$

или

$$\vec{z}' = \vec{g}(u, \vec{z}, x_0, \vec{y}_0), \quad \vec{z}(0) = \vec{o}. \quad (4.5.5)$$

Таким образом, в формулировке задачи (4.5.5) исходные начальные данные x_0, \vec{y}_0 превратились в параметры правой части дифференциального уравнения, а новые начальные условия стали независимыми от параметров.

В силу условий доказываемой теоремы, для задачи (4.5.5) оказываются справедливыми утверждения теорем 4.5.2 и 4.5.3 о непрерывной зависимости и дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. А из равносильности задач (4.5.5) и (4.5.4) следует, что эти условия будут справедливы и для исходной задачи (4.5.4).

Теорема доказана.

Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

В § 1.5 были обсуждены методы нахождения общего решения уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, то есть уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (4.6.1)$$

Как и раньше, мы будем предполагать, что скалярные функции $F(x, y, d)$ и $\frac{\partial F}{\partial d}$ вещественны и непрерывны в некоторой непустой области $G \subseteq E^3$.

Задачей Коши для уравнения (4.6.1), согласно определению 1.5.2, называется задача поиска $y^*(x)$ – частного решения уравнения (4.6.1), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} y^*(x_0) &= y_0, \\ y^{*\prime}(x_0) &= d_0, \\ \text{где } F(x_0, y_0, d_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (4.6.1) – (4.6.2) дает

Теорема 4.6.1 Пусть функции $F(x, y, d)$ и $\frac{\partial F}{\partial d}$ непрерывны в области G и пусть $\frac{\partial F}{\partial d} \Big|_{(x_0, y_0, d_0)} \neq 0$, тогда найдется $\delta > 0$ такое, что решение задачи Коши (4.6.1) – (4.6.2) существует и единственno на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Доказательство

Согласно известной из курса математического анализа *теореме о неявной функции* уравнение $F(x, y, d) = 0$ разрешимо относительно d в форме единственной и непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $\|x_0 \ y_0\|^T$ функции $d = f(x, y)$.

Это означает, что задача Коши (4.6.1) – (4.6.2) равносильна задаче Коши вида

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y), \\ \text{где } y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

существование и единственность решения которой были доказаны в теореме 4.3.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 4.6.1 не выполняются.

**Определение
4.6.1**

Точка $\|x_0 y_0\|^T$ называется *неособой*, если существует ее окрестность такая, что через эту точку в данной окрестности проходит интегральная кривая задачи (4.6.3) и притом только одна.

Иначе точка $\|x_0 y_0\|^T$ называется *особой*.

Решение задачи Коши (4.6.1) – (4.6.2), все точки которого особые, называется *особым решением*.

Геометрически данное определение может быть интерпретировано так: в каждой точке интегральной кривой особого решения ее касается интегральная кривая другого решения уравнения (4.6.1), то есть, решения не совпадающего с особым в некоторой окрестности точки касания. Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 4.6.1, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d}(x, y, d) = 0. \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Если из этой системы исключить d , то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x, y) = 0$.

Определение

4.6.2

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x, y) = 0$, называется *дискриминантной кривой* уравнения (4.6.1).

Из сказанного следует, что интегральная кривая особого решения обязана быть дискриминантной кривой. Обратное, вообще говоря, неверно, но тем не менее искать особые решения следует среди дискриминантных кривых. Проиллюстрируем этот факт следующими задачами.

Задача Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Решение 1°. $y'^2 = y$. Решив систему (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - y = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$, получим по-
лучим дискриминантную кривую вида $y = 0$. Это – очевидно решение.

При этом исходное уравнение также имеет решения вида $y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$. Нетрудно убедиться, что $y = 0$ – особое решение (см. рис.1).

2°. $y'^2 = x$. Из системы (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - x = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$ на-
ходим, что дискриминантная кривая есть $x = 0$.

Данное уравнение имеет решения $y = \pm \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$,
однако дискриминантная кривая $x = 0$ – не ре-
шение уравнения, а геометрическое место точек
возврата его интегральных кривых. (См. рис.2.)

3°. $y'^2 - 4y^3(1 - y) = 0$. Система (4.6.4) в этом случае такова:

$$\begin{cases} d^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \\ 2d = 0. \end{cases}$$

Значит, дискриминантная кривая задается уравнением $y^3(1 - y) = 0$ и состоит из двух ветвей:
 $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что обе они являются решениями.

Проверьте самостоятельно, что исходное уравнение также имеет решения $y = \frac{1}{1 + (x - C)^2}$.

Заметим, что при этом на $y = 1$ единственность нарушается, а на $y = 0$ не нарушается. Значит, $y = 0$ – неособое решение.

Наконец, поскольку $y = 1$ есть касательная к нелинейным интегральным кривым, делаем заключение, что $y = 1$ – особое решение. (См. рис.3.)

Решение
получено.

В общем случае для выделения особого решения уравнения (4.6.1) следует

- 1° найти общее решение уравнения (4.6.1) ;
- 2° найти дискриминантные кривые уравнения (4.6.1), которые являются частными решениями этого уравнения ;
- 3° проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (4.6.1).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п. 3° следующая. Пусть $y(x, C) \forall x \in [a, b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (4.6.1), а $y^+(x)$ – частное решение этого уравнения, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^+(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a, b]$ у *переопределенной* системы

$$\begin{cases} y(x, C) &= y^+(x), \\ \frac{\partial y(x, C)}{\partial x} &= \frac{d y^+(x)}{d x} \end{cases} \quad (4.6.5)$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.

Проиллюстрируем применение описанной схемы для конкретной задачи. Методы поиска частных решений уравнений, не разрешенных относительно производной, нами рассматривались в § 1.5; здесь же мы воспользуемся (в упрощенном варианте) ранее полученным решением задачи 1.5.1.

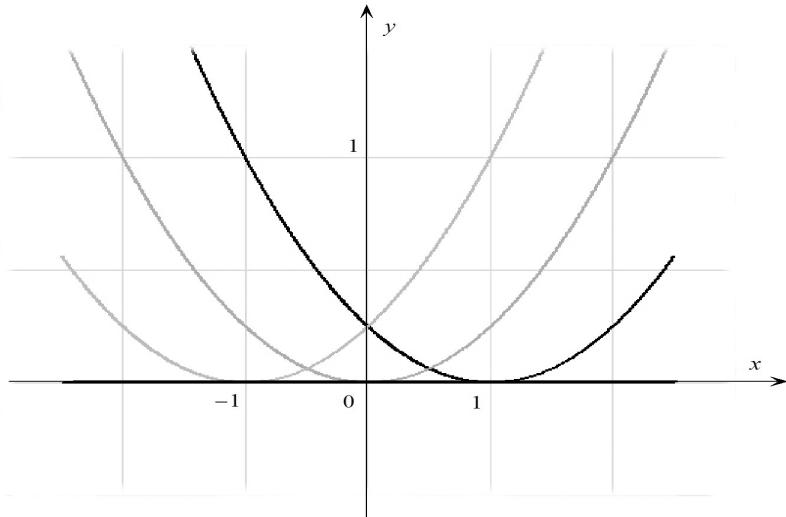


Рис. 1. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (1°)

Задача 4.6.2 Найти особые решения уравнения

$$xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}.$$

Решение 1°. Общее решение данного уравнения найдем методом введения параметра (см § 1.5, задача 1.5.1) :

$$\begin{cases} y(x, C) = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} & \forall C > 0, \\ y(x) = e^{2x-1}. \end{cases}$$

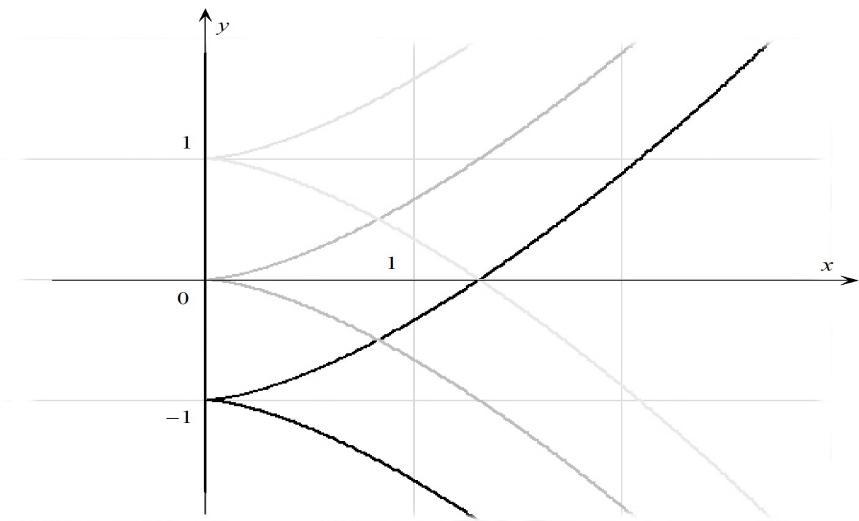


Рис. 2. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (2°)

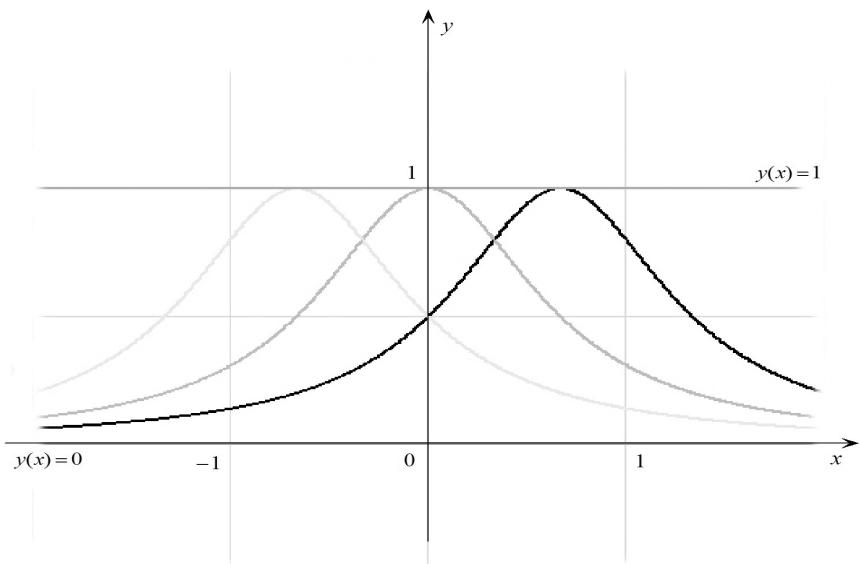


Рис. 3. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (3°)

2°. Составим систему (4.6.4) для определения вида линии $D(x, y) = 0$ – дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} xd - y - \frac{d}{2} \ln \frac{d}{2} = 0, \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Ее решением будет функция $y = e^{2x-1}$, которая, очевидно, есть частное решение исходного уравнения. Таким образом,

$$\begin{aligned} y(x, C) &= Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}, \\ y^+(x) &= e^{2x-1}. \end{aligned}$$

3°. Наконец, для проверки выполнения определения особых решений, составим систему (4.6.5):

$$\begin{cases} Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} = e^{2x-1}, \\ C = 2e^{2x-1}. \end{cases}$$

Она совместна $\forall C > 0$, причем ее решение есть функция $C(x) = 2e^{2x-1}$. Это и означает, что $y^+(x) = e^{2x-1}$ – особое решение исходного уравнения. Вид соответствующих интегральных кривых показан на рис.4.

Решение получено.

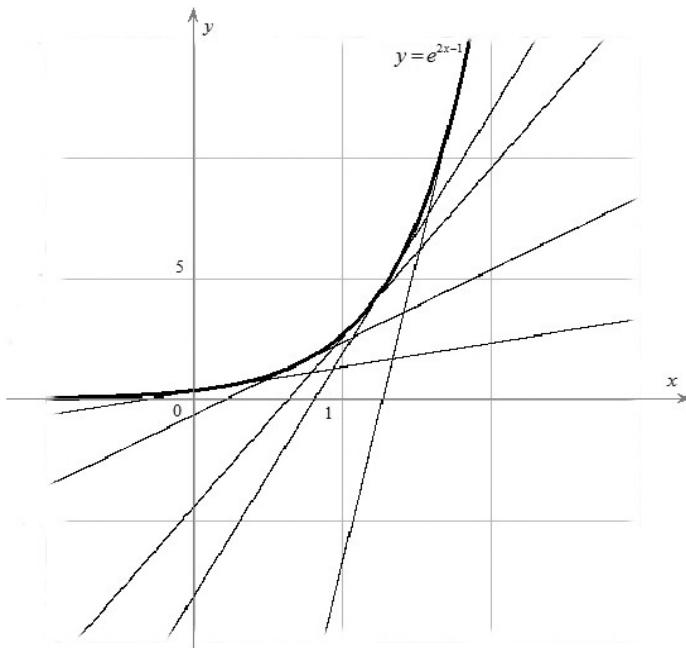


Рис. 4. Интегральные кривые задачи 4.6.2