Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 3.4.1	Степенью k, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k} .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$, и при $k \geq 2$: $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим выполняемые поэлементно операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

Определение 3.4.2	Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t)\ \ \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t \in T$. Тогда элементами матрицы – $\lim\limits_{t\to t_0}\|A(t)\|$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_{ij}(t)$; – $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\,\alpha_{ij}(t)$; – $\int\limits_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{ij}(u)\,du$.

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

Определение 3.4.3	Матрица $\lVert B \rVert$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lVert A_{(k)} \rVert$, если $\forall i,j=[1,n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$, составленный из ij-х элементов матриц $\lVert A_{(k)} \rVert$, сходится к ij-му элементу $\lVert B \rVert$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что, в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми аналогичные доказанным в курсе математического анализа теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение 3.4.4	*Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle\|A\|\rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \left|\alpha_{ij}\right|$.

Теорема 3.4.1

Если $\left\langle\|A_{(k)}(t)\|\right\rangle \leq a_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall t \in T$, **и мажорирующий числовой ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится абсолютно и равномерно на** T.

Доказательство

Следует из определений 3.4.3 и 3.4.4, а также соответствующих свойств функциональных рядов.

Теорема доказана.

Имеет место

Теорема 3.4.2 **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots \quad (3.4.1)$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \le \rho$ комплексной плоскости.

Доказательство

Согласно определению 3.4.4, для любой квадратной матрицы $\|A\|$ существует неотрицательное число $M = \langle \|A\| \rangle$, для которого $|\alpha_{ij}| \leq M \;\forall i, j = [1, n]$. Оценим, исходя из правила умножения матриц, норму матрицы $\|A\|^2$. Обозначим элемент $\|A\|^k$ как $\alpha_{ij(k)}$. Поскольку

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \text{ то } \alpha_{ij(2)} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\alpha_{sj},$$

и

$$\left|\alpha_{ij(2)}\right| \;\leq\; \sum_{s=1}^{n} |\alpha_{is}||\alpha_{sj}| \;\leq\; nM^2\ .$$

Действуя аналогично для бо́льших степеней матрицы $\|A\|$, по индукции получаем $\left|\alpha_{ij(k)}\right| \leq n^{k-1}M^k$.

В силу определения 3.4.3 сходимость матричного ряда (3.4.1) равносильна сходимости числовых рядов

$$\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \alpha_{ij(k)}}{k!} = \delta_{ij} + \frac{t\alpha_{ij(1)}}{1!} + \frac{t^2\alpha_{ij(2)}}{2!} + \frac{t^3\alpha_{ij(3)}}{3!} + \ldots \quad (3.4.2)$$

для всех $i, j = [1, n]$. В этой формуле слагаемое δ_{ij} есть символ Кронекера.

Сходимость каждого из рядов (3.4.2) следует из сходимости мажорирующего числового ряда

$$1 + \frac{\rho M}{1!} + \frac{\rho^2 n M^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k n^{k-1} M^k}{k!} + \ldots\ ,$$

который сходится по признаку д’Аламбера (проверьте это самостоятельно!).

Наконец, используя утверждение теоремы 3.4.1, приходим к доказываемому результату.

Теорема доказана.

Определение 3.4.5	Матрица, являющаяся суммой матричного ряда (3.4.1), называется *показательной функцией матрицы* или *экспонентой матрицы* $\|A\|$ и обозначается как $e^{t\|A\|}$.

Иначе говоря,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} \ . \qquad (3.4.3)$$

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3.4.3 **Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные матрицы порядка n. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:**

– **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$,

то $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|}e^{\|B\|}$**;**

– $$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

Доказательство

Докажем первое утверждение теоремы.

Имеем, с одной стороны,

$$e^{\|A\|}\,e^{\|B\|} =$$

$$= \left(\|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots\right)\left(\|E\| + \frac{\|B\|}{1!} + \frac{\|B\|^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} g_{km}\|A\|^k\|B\|^m. \tag{3.4.4}$$

С другой стороны,

$$e^{\|A\|+\|B\|} = \|E\| + \frac{\|A\| + \|B\|}{1!} + \frac{(\|A\| + \|B\|)^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} h_{km}\|A\|^k\|B\|^m\ , \tag{3.4.5}$$

поскольку из коммутируемости матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ следует справедливость матричного аналога формулы бинома Ньютона, то есть равенств вида

$$(\|A\|+\|B\|)^2 = (\|A\|+\|B\|)(\|A\|+\|B\|) =$$

$$= \|A\|^2 + \|A\|\|B\| + \|B\|\|A\| + \|B\|^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

и им подобным.

Таким образом, матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ (в предположении коммутативности их произведения) по алгебраическим свойствам не отличаются от чисел. Значит, вид разложений (3.4.4) и (3.4.5) не зависит от того, являются ли $\|A\|$ и $\|B\|$ числами или матрицами.

Сравним теперь значения коэффициентов g_{km} и h_{km} исходя из факта, что разложение функции в степенной ряд, если существует, то оно единственно. Это дает

$$g_{km} = h_{km} \ \ \forall k, m = 0, 1, 2, 3, \dots \ ,$$

то есть выражения (3.4.4) и (3.4.5) совпадают.

Убедимся теперь в справедливости второго утверждения теоремы.

Поскольку в нашем случае матричный ряд (3.4.3) сходится на множестве T, а ряд, составленный из производных его членов, сходится равномерно к производной от суммы ряда, то его можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \frac{d}{dt}\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\| + \frac{t\|A\|^2}{1!} + \frac{t^2\|A\|^3}{2!} + \frac{t^3\|A\|^4}{3!} + \ldots =$$

$$= \|A\|\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

И мы приходим к заключению о справедливости второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1 **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для матричного уравнения $\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$.**

Доказательство

Очевидно вытекает из второго утверждения теоремы 3.4.3.

Следствие доказано.

Теорема 3.4.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) может быть представлено в форме**

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = e^{t\|A\|} \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| , \tag{3.4.6}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – **произвольные комплексные числа.**

Доказательство

Пусть k-й столбец матрицы $\|X(t)\|$ есть вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\| \quad \forall k = [1, n]$. Тогда матричное дифференциальное уравнение

$$\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$$

можно записать в покомпонентном виде, как следующий набор из n систем $\forall k = [1, n]$:

$$\begin{cases} \dot{g}_{1(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \dot{g}_{2(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dot{g}_{n(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} g_{j(k)}(t) \ . \end{cases}$$

Это означает, что каждая вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\|$ есть частное решение однородной системы (3.1.1).

Кроме того, поскольку $\|X(0)\| = \|E\|$, то каждая такая вектор-функция есть решение задачи Коши с начальным условием в виде

$$\|g_{(k)}(0)\| = \|\, 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \,\|^{\mathrm{T}},$$

где единица стоит в k-й строке столбца – результата транспонирования.

Эти столбцы, очевидно, линейно независимые, значит, по теореме существования и единственности решения задачи Коши линейно независимыми будут и сами вектор-функции $\|g_{(k)}(t)\| \ \ \forall k = [1, n]$.

Но тогда $\|g_{(k)}(t)\| \ \ \forall k = [1, n]$ можно принять за базис в линейном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), и записать общее решение как

$$\| \, x(t) \| = \sum_{k=1}^{n} C_k \| \, g_{(k)}(t) \|$$

или в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|X(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| ,$$

где $C_1, \, C_2, \, \dots, \, C_n$ – произвольные комплексные числа.

Откуда, использовав равенство $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$, получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Иначе говоря, теорема 3.4.4 утверждает, что столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения задач Коши для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть столбцы единичной матрицы. Такие решения линейно независимые и образуют базис в n-мерном линейном пространстве частных решений этой системы уравнений, что, очевидно, позволяет находить и общее решение этой системы уравнений.

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ (альтернативным следствию 3.4.1) служит формула (3.4.3). Однако ее использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей. Значительно более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм, основанный на следующих лемме и теореме.

Лемма 3.4.1 **Если матрица $\|D\|$ диагональна, т.е. у нее на главной диагонали стоят числа $\lambda_k \ \ \forall k = [1, n]$, а остальные элементы нулевые, то**

$$e^{\|D\|} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{array} \right\| .$$

Доказательство

Следует из определения 3.4.5 и правил умножения матриц.

Лемма доказана.

Теорема 3.4.5 **Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|S\|$ квадратные, порядка n , и пусть матрица $\|S\|$ имеет обратную. Тогда если $\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \ \ \forall t \in T \,.$$

Доказательство

Имеем

$$\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \,,$$

$$\|A\|^2 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1} \,,$$

$$\|A\|^3 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^3\|S\|^{-1} \,,$$

. . . .

$$\|A\|^k = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^{k-1}\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1} \,,$$

. . . .

Подставляя в формулу (3.4.3) $\|A\|^k = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1}$, получаем

$$e^{t\|A\|} = \|S\|\|E\|\|S\|^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1} =$$

$$= \|S\| \left(\|E\| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\|B\|^k \right) \|S\|^{-1} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \,.$$

Теорема доказана.

Из курса линейной алгебры известно, что если в U^n существует базис из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, то матрица $\|D\|$, определяемая формулой

$$\|D\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| \, ,$$

диагональна (здесь $\|S\|$ есть матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов). Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 3.4.1), используя теорему 3.4.5, найдем искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|D\|}\|S\|^{-1} \, .$$

В случае, когда базис из собственных векторов матрицы $\|A\|$ не существует, всегда возможно, согласно теореме 3.2.2 (Жордана), перейти (при помощи невырожденной матрицы перехода $\|S\|$) к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$, то есть иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых, размером l x l клеток (3.2.1) вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right\| .$$

Покажем теперь, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя сумму какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \qquad \text{где}$$

$$\|J_l(0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$, очевидно, коммутируют, поэтому (согласно теореме 3.4.3):

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\|+t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|} \ .$$

Первый сомножитель легко вычисляется при помощи леммы 3.4.1. Второй найдем при помощи формулы (3.4.3):

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \, \|J_l(0)\|^k \ . \qquad (3.4.7)$$

Заметим, что согласно правилу умножения матриц

$$\|J_l(0)\|^2 = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ,$$

. . . .

$$\|J_l(0)\|^{l-2} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| ,$$

$$\|J_l(0)\|^{l-1} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

То есть, при каждом последовательном увеличении на единицу k – показателя степени в $\|J_l(0)\|^k$ – единичная наддиагональ *укорачивается* на единицу и *сдвигается* вправо на один столбец и вверх на одну строку.

При $k = l$ матрица $\|J_l(0)\|^k$ оказывается нулевой, и ряд (3.4.7) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых.

В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \dots & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dots & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dfrac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \qquad (3.4.8)$$

Вычислив аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвратившись в исходный базис по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1} \ ,$$

получим искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.