Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 3.0.1

Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

где $t \in T$, $x_k(t)$ $k = [1, n]$ – комплексно-значные непрерывно дифференцируемые неизвестные функции вещественного аргумента, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на T функции, называемые *свободными членами.* Числа a_{ij} $\forall i, j = [1, n]$ – комплексные константы.

Данную систему уравнений часто записывают в так называемом *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + b_i(t) \; , \; \forall i = [1, n] \; , \tag{3.0.1}$$

или же в еще более простой, матричной форме $\|\dot{x}\| = \|A\| \|x\| + \|b\|$, где

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| , \; \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| , \; \|b\| = \left\| \begin{array}{c} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{array} \right\| .$$

Отметим, что *задача Коши* для системы линейных уравнений (3.0.1) заключается в отыскании ее частного решения, удовлетворяющего *начальным условиям* $x_k(t_0) = x_{(0)k} \; \forall k = [1, n]$, где $x_{(0)k}, \; t_0 \in T$ – фиксированные комплексные числа. [1]

Далее (в § 4.3) будет показано, что задача Коши для системы уравнений (3.0.1) разрешима всегда и притом однозначно.

[1] Здесь и далее нижний индекс, выделенный круглыми скобками, есть номер члена некоторого множества (последовательности), а не номер координаты.

Методы решения системы уравнений (3.0.1) принципиально аналогичны методам решения линейного уравнения n-го порядка, поскольку линейное уравнение n-го порядка может быть сведено к системе вида (3.0.1) и наоборот. Иллюстрацией такого сведения, называемого *методом исключения*, может служить следующий пример.

Задача 3.0.1 Найти вещественные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) + \sin t, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - 2\cos t. \end{cases}$$

Решение Продифференцировав обе части первого уравнения, получим равенство $\ddot{x}_1(t) = 4\dot{x}_1(t) - 3\dot{x}_2(t) + \cos t$. Затем подставляя в него $\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - 2\cos t$ из второго уравнения системы и $3x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 4x_1(t) - \sin t$ – из первого, приходим к линейному уравнению второго порядка $\ddot{x}_1(t) - 3\dot{x}_1(t) + 2\dot{x}_1(t) = \sin t + 7\cos t$. Его общее решение: $x_1(t) = R_1\, e^t + R_2\, e^{2t} - 2\sin t + \cos t$.

Далее, опять-таки из первого уравнения исходной системы, получаем

$$x_2(t) = R_1\, e^t + \frac{2}{3}\, R_2\, e^{2t} - 2\sin t + 2\cos t,$$

где R_1 и R_2 произвольные вещественные константы.

Наконец, в матричной форме это решение можно записать так

Решение получено.
$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = R_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^t + R_2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right\| e^{2t} - \left\| \begin{matrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\sin t - 2\cos t \end{matrix} \right\| .$$

Использованный метод аналогичен методу исключения при решении систем алгебраических уравнений. Применение его, как правило, целесообразно лишь для достаточно простых и низкоразмерных систем вида (3.0.1).

Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов)

Рассмотрим теперь *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \; . \tag{3.1.1}$$

Свойства ее общего решения – совокупности всех частных решений – описываются следующим набором теорем.

Теорема 3.1.1 (Принцип супер- позиции)	**Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (3.1.1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\|+C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант C_1 и C_2.**

Доказательство

Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (3.1.1), то справедливы равенства $\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\| = \|o\|$ и $\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\| = \|o\|$, где $\|o\|$ — нулевой столбец.

Имеем

$$\|\dot{x}(t)\| - \|A\|\|x(t)\| =$$

$$= C_1\|\dot{x}_{(1)}(t)\| + C_2\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - C_1\|A\|\|x_{(1)}(t)\| - C_2\|A\|\|x_{(2)}(t)\| =$$

$$= C_1\left(\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\|\right) +$$

$$+C_2\left(\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\|\right) = C_1\|o\| + C_2\|o\| = \|o\| \ .$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.1 **Множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) образует линейное пространство.**

Доказательство

Следует из аксиоматики линейного пространства и теоремы 3.1.1.

Следствие доказано.

Предположим теперь, что $\|A\|$ – матрица системы уравнений (3.1.1) – задает в n-мерном унитарном пространстве U^n со стандартным базисом линейный оператор (точнее, линейное преобразование) $\widehat{A}$. Напомним также, что ненулевой элемент $f \in U^n$ называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим *собственному значению* λ, если $\widehat{A}f = \lambda f$.

В координатной форме (как показывается в курсе линейной алгебры) последнее равенство будет иметь вид

$$\|\widehat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| \ .$$

Ответ на вопрос: «При каких $\|f\|$ и λ частное нетривиальное решение системы (3.1.1) есть вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$?», дает

Теорема 3.1.2 **Для того, чтобы вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлась частным ненулевым решением системы (3.1.1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а λ – соответствующим собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$ в U^n.**

Доказательство

Пусть $\|f\|$ некоторый ненулевой столбец. Подставим $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ в уравнение (3.1.1), приняв во внимание равенство $\dfrac{d}{dt}\,e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, а также то, что $e^{\lambda t} \neq 0$, получим

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \;\Leftrightarrow\; \lambda\|f\|e^{\lambda t} = \|A\|\left(\|f\|e^{\lambda t}\right) \;\Leftrightarrow\; \|A\|\|f\| = \lambda\|f\| \,.$$

Теорема доказана.

Возможный вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений устанавливает

Теорема 3.1.3 **Пусть в линейном пространстве U^n существует базис $\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

- $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (3.1.1);**

- **и каждое частное решение системы (3.1.1) может быть представлено в виде** $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.

Доказательство

Справедливость первого пункта следует из теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Докажем второй пункт. Пусть $\|x(t)\|$ некоторое частное решение системы (3.1.1). Его значение при любом фиксированном $t \in T$ может быть (в силу условия теоремы) разложено в U^n по базису из собственных векторов преобразования $\|A\|$

$$\|x(t)\| = D_1(t)\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|f_{(n)}\| \; . \quad (3.1.2)$$

Подставим это выражение в систему (3.1.1), получим

$$\dot{D}_1(t)\|f_{(1)}\| + \dot{D}_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + \dot{D}_n(t)\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\|A\|\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|A\|\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|A\|\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\lambda_1\|f_{(1)}\| + D_2(t)\lambda_2\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\lambda_n\|f_{(n)}\| \; .$$

Откуда вытекает равенство

$$\left(\dot{D}_1(t) - \lambda_1 D_1(t)\right)\|f_{(1)}\| + \ldots + \left(\dot{D}_n(t) - \lambda_n D_n(t)\right)\|f_{(n)}\| = \|o\|.$$

Наконец, в силу линейной независимости базисных элементов, из этого следует

$$\dot{D}_k(t) - \lambda_k D_k(t) = 0 \quad \forall k = [1, n] \qquad \Longrightarrow \qquad D_k(t) = C_k e^{\lambda_k t} \; ,$$

что, в сочетании с равенством (3.1.2), дает требуемый формат записи решения.

Теорема доказана.

Следствие 3.1.2 **В условиях теоремы 3.1.3, линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (3.1.1), является n-мерным.**

Доказательство

Следует из определения конечномерного линейного пространства и теоремы 3.1.3.

Следствие доказано.

Таким образом, в тех случаях, когда из собственных векторов линейного преобразования $\widehat{A}$ можно образовать базис в U^n, общее решение системы (3.1.1) определяется теоремой 3.1.3.

В качестве *достаточных* признаков такой возможности удобно использовать следующие, доказываемые в курсе линейной алгебры, критерии.

Из собственных векторов линейного преобразования можно образовать базис в U^n, если

– все собственные значения $\widehat{A}$ попарно различны или;
– матрица $\|\widehat{A}\|$ эрмитовская (т.е., $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad \forall i, j = [1, n]$) в U^n (или же, в случае E^n, симметрическая).

Использование утверждения теоремы 3.1.3 можно проиллюстрировать следующим примером.

Задача 3.1.1 Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) & & & - & x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t). & & \end{cases}$$

Решение Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{rrr} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{array} \right\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \; .$$

Или $\quad (\lambda{+}2)(\lambda{-}1)^2 = 0$, $\quad$ откуда $\quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 1$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений

$$\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\| \ .$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \| -1 \ 1 \ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \ . \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1 \ 1 \ 0\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|1 \ 0 \ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимые и образуют базис в U^3. Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| e^{t} + C_3 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{t},$$

Решение получено.

где $C_1, \ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные числа.

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то из общего комплексного решения можно выделить вещественные решения. В этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис. Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары.

Процедура этого выделения в точности совпадает с методом, изложенным в § 2.4, за исключением некоторых технических деталей, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

Задача 3.1.2 Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & - & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t), & & \\ \dot{x}_3(t) & = & 3x_1(t) & & & + & x_3(t). \end{array}\right.$$

Решение: Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{rrr} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right\| = 0 \implies (1-\lambda)^3+4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2+4\right) = 0,$ откуда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1\pm 2i.$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$.
Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \implies \left\{ \begin{array}{c} \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \ \ 1 \ -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0 \ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0 \ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i \ 1 \ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \| -2i \ 1 \ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re}\Phi(t) + i \operatorname{Im}\Phi(t)$. Найдем $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\operatorname{Im}\Phi(t)$. Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi(t) = \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| + i \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t \right) =$$

$$= \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \cos 2t - \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \sin 2t \right) +$$

$$+ i \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \sin 2t + \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \cos 2t \right) \ .$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

Решение получено.

где R_1, R_2 и R_3 – произвольные вещественные постоянные.