# Квадратичные формы в евклидовом пространстве

Рассмотрим задачу отыскания в $E^n$ базиса, в котором *квадратичная форма* имеет диагональный или канонический вид.

Напомним: ранее мы рассматривали эту задачу в произвольном конечномерном пространстве $\Lambda^n$, где она всегда имела решение, и, притом, неединственное. В евклидовом конечномерном пространстве, как мы увидим, имеются альтернативные, в большом числе случаев более эффективные методы, ее решения.

Как мы знаем, любая квадратичная форма в $n$-мерном пространстве полностью и однозначно описывается симметрической матрицей и произвольном базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g .$$

Матрица квадратичной формы зависит от выбора базиса и меняется по следующему правилу

$$\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| , \qquad (1)$$

где $\| S \|$ − матрица перехода от исходного базиса к $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ − новому.

Пусть теперь квадратичная форма $\Phi(x)$ задана в исходном *ортонормированном* базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ евклидова пространства $E^n$ . Попробуем найти в $E^n$ другой *ортонормированный* базис $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, в котором форма $\Phi(x)$ имеет *диагональный* вид.

Предварительно обратим внимание на то, что в математических текстах или высказываниях нередко используются (ради краткости, или в силу контекстной очевидности) выражения типа: "положительно определенная матрица", "собственные векторы матрицы" и т.п. Эти выражения с формальной точки зрения некорректны, поскольку матрицам в них приписываются свойства, которыми они не обладают.

Знаковая определенность, это свойство квадратичной формы, а собственные значения и собственные векторы есть у линейных преобразований. Причина этих естественных "оговорок" в том, что как для линейных преобразований, так и для квадратичных форм координатные представления суть квадратные матрицы.

\

Действительно, если мы имеем некоторую матрицу, то по ее виду нельзя сказать, является эта матрица записью в $E^n$ линейного преобразования, матрицей квадратичной формы или же − представлением какого-либо иного объекта. Для корректности требуется более подробное описание.

Однако, как и все в нашем мире, имеет "оборотную сторону медали", отмеченная неоднозначность терминов может быть использована и "во благо".

Будем предполагать, что мы обладаем отличной наблюдательностью и прекрасной памятью. Благодаря чему вначале вспомним, что

> самосопряженные линейные преобразования в $E^n$ имеют *ортонормированный* базис, состоящий из его собственных векторов, в котором матрица преобразования *диагональная*.

С другой стороны, матрица квадратичной формы $\Phi(x)$ симметрическая и в исходном ортонормированном базисе *может рассматриваться* как матрица *самосопряженного преобразования* $\hat{\Phi}(x)$, которое принято называть *присоединенным* к форме $\Phi(x)$.

Итак, мы имеем два разных по своей природе объекта: квадратичную форму $\Phi(x)$ и присоединенное преобразование $\hat{\Phi}(x)$, имеющие (по построению) в исходном ОНБ одинаковую матрицу.

Теперь вспомним, что происходит с матрицами этих объектов при замене одного ОНБ на другой.

В силу (1) для *квадратичной формы* имеем

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{e} \| S \| \ .$$

А вот для *линейного преобразования* правило изменения *иное*:

$$\| \hat{\Phi} \|_{e'} = \| S \|^{-1} \| \hat{\Phi} \|_{e} \| S \|. \tag{2}$$

В этой ситуации "помочь горю" удается благодаря нашей прекрасной памяти. Мы вспоминаем, что матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному служат (и только они!) *ортонормированные* матрицы.

А эти матрицы удовлетворяют равенству $\| S \|^{-1} = \| S \|^{\mathrm{T}}$ . Но тогда матрицы $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ одинаковые и в *новом* ОНБ, поскольку из (2) имеем $\| \hat{\Phi} \|_{e'} = \| \Phi \|_{e'}$ . *The game is over!*

Резюмируем наши достижения в форме маленького, но важного обобщения. Пусть мы имеем в $\Lambda^n$ матрицу квадратичной формы в *стандартном* базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

Превратим (это наше право!) $\Lambda^n$ в $E^n$, введя скалярное произведение при помощи матрицы Грама, являющейся единичной. Тогда базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ станет ортонормированным и симметрическую матрицу $\| \Phi \|_g$ можно принять за матрицу присоединенного преобразования.

Строим базис из собственных векторов этого преобразования, в котором его матрица будет диагональной (с собственными значениями $\hat{\Phi}(x)$ на главной диагонали). С этим базисом мы остаемся в $\Lambda^n$, забыв о $E^n$ (это, опять-таки, наше право!)

Из наших рассуждений следует, что справедлива

Теорема 1. **Для всякой квадратичной формы, заданной в ортонормированном базисе, существует ортонормированный базис, в котором эта форма имеет диагональный вид.**

Рассмотрим следующий (решенный нами ранее в $\Lambda^3$) пример.

Задача 1. *При помощи ортогонального оператора привести к диагональному виду в* $E^3$ *квадратичную форму* $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$.

1°. Пусть исходный ОНБ состоит из элементов $\{e_1, e_2, e_3\}$ с

$$\| e_1 \| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \| e_2 \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \ \| e_3 \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Восстановим по квадратичной форме $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$ ее матрицу. Получим

$$\| \Phi \|_e = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

2°. Рассмотрим построенную симметрическую матрицу как задающую *самосопряженный* линейный оператор $\hat{\Phi}$ в $E^3$ и найдем для него собственные значения.

Составляем и решаем характеристическое:

$$\det\begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \ .$$

Оно имеет корни: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 1$, которые и являются собственными значениями.

Заметим, что, если нас интересует только *диагональный вид* квадратичной формы, то его уже можно написать сейчас:

$$\Phi(x) = -2\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2$$

и на этом закончить решение задачи.

3°. В случае, когда требуется найти также и диагональный базис для $\Phi(x)$, то есть, найти матрицу $\|S\|$ – матрицу перехода от исходного ОНБ к искомому, необходимо вначале найти и собственные векторы оператора $\hat{\Phi}$.

Для $\lambda = -2$ имеем $\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|$, что дает $\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 = -\xi_3, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = \xi_3. \end{cases}$ Принимая $\xi_3$ за свободное неизвестное, получим собственный вектор $f_1 = \left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\|$.

Кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 2, значит, ему должны отвечать два линейно независимых (но не обязательно ортогональных!) собственных вектора. Компоненты собственного вектора должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|,$$

из которых независимое только одно $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3$.

Общее решение этой системы будет иметь вид $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall \alpha, \beta$. Каждый столбец вида $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ или $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ ортогонален $f_1$, но сами они *не ортогональны* друг другу.

Поэтому пару ортогональных собственных векторов, отвечающих $\lambda = 1$, сформируем из первого фундаментального решения и ортогональной ему линейной комбинации первого и второго.

Условие ортогональности столбцов $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$, очевидно, есть $2\alpha + \beta = 0$. Откуда, например, выбрав $\alpha = 1$ и $\beta = -2$, получим $f_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $f_3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$.

4°. Набор элементов $\{f_1, f_2, f_3\}$ является в $E^3$ ортогональным, но ненормированным базисом.

Чтобы построить ортонормированный базис, выполним нормировку каждого из элементов базиса $\{f_1, f_2, f_3\}$. В результате получим матрицу (ортогональную!)

$$\| S \| = \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right\|$$

(перехода от “старого” базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к “новому” базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$), столбцами которой являются координатные представления элементов базиса $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Мы уже отметили, что эта матрица *ортогональная* (покажите это самостоятельно!), то есть, удовлетворяет соотношению $\|S\|^{-1}=\|S\|^{\mathrm{T}}$. В свою очередь, это позволяет легко получить формулы, выражающие “новые” координаты через “старые”.

Действительно из соотношения $\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|=\|S\|\left\|\begin{matrix}\xi'_1\\ \xi'_2\\ \xi'_3\end{matrix}\right\|$ следует $\left\|\begin{matrix}\xi'_1\\ \xi'_2\\ \xi'_3\end{matrix}\right\|=\|S\|^{-1}\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|$, или окончательно $\left\|\begin{matrix}\xi'_1\\ \xi'_2\\ \xi'_3\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|$. Это − ответ к задаче 1.

## Построение базиса, в котором две квадратичные формы (одна из которых знакоопределенная) имеют диагональный вид

Пусть в некотором базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ линейного пространства $\Lambda^n$ задана пара квадратичных форм $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первая из которых знакоопределенная (например, положительно). Рассмотрим задачу отыскания базиса $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, в котором форма $\Phi(x)$ имеет *канонический*, а форма $\Psi(x)$ – *диагональный* вид.

Предварительно отметим, что условие знаковой определенности одной из приводимых квадратичных форм *существенно*, поскольку в общем случае две различные квадратичные формы одной линейной заменой координат к диагональному виду могут не приводиться.

Например, квадратичную форму $\Phi(x) = A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2$ в $\Lambda^2$ можно привести к диагональному виду при помощи линейного оператора, сводящегося к повороту плоскости базисных векторов на угол $\alpha$. При этом необходимо (проверьте это, или вспомните первый семестр и теорему о приведении линии 2-го порядка к каноническому виду!), чтобы $\alpha$ удовлетворяло уравнению

$$(A - C)\sin 2\alpha = 2B\cos 2\alpha .$$

Однако для пары квадратичных форм

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \xi_1\xi_2$$

угла $\alpha$, удовлетворяющего системе условий $\begin{cases} 2\sin 2\alpha = 0, \\ 0 = \cos 2\alpha, \end{cases}$ очевидно, не существует.

Опишем теперь алгоритм приведения в $\Lambda^n$ пары квадратичных форм $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, заданных в некотором исходном базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ (первая из которых положительно определенная) соответственно к каноническому и диагональному виду.

1°. Поскольку квадратичная форма $\Phi(x)$ положительно определенная, то для нее в $\Lambda^n$ найдется другой базис $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, в котором она имеет канонический вид, в котором все коэффициенты равны единице.

   Приведем эту форму к этому виду каким-либо методом, например, выделив полные квадраты (*метод Лагранжа*) с последующей нормировкой элементов его матрицы.

   Одновременно *тем же самым* методом преобразуем также и вторую квадратичную форму $\Psi(x)$.

2°. Введем в $\Lambda^n$ скалярное произведение (стандартное) по формуле $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi'_k \eta'_k$, превратив тем самым наше линейное пространство $\Lambda^n$ в евклидово $E^n$. Отметим, что в этом случае базис $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\} = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, в котором $\Phi(x)$ имеет канонический вид, ортонормированный.

3°. Построим теперь третий, также ортонормированный базис $\{e''_1, e''_2, \ldots, e''_n\}$, переход к которому выполняется при помощи матрицы $\|S\|$ по схеме, описанной в начале этого текста. В этом, третьем базисе квадратичная форма $\Psi(x)$ *диагональна*.

Действительно, при этом переходе квадратичная форма $\Phi(x)$ не потеряет канонического вида, поскольку из условия $\| \Phi \|_e = \| E \|$ и ортогональности $\|S\|$ следует, что

$$\| \Phi \|_{e''} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{e'} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| E \| \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| S \| = \| S \|^{-1} \| S \| = \| E \|.$$

Таким образом, построен базис, в котором квадратичная форма $\Phi(x)$ имеет канонический вид, а форма $\Psi(x)$ – диагональный.

Наконец отметим, что матрица перехода от исходного базиса к искомому есть *произведение*

*матрицы перехода*, при котором знакоопределенная квадратичная форма приводится к каноническому виду,

и

*ортогональной матрицы* $\|S\|$.

Продемонстрируем использование описанного подхода на примере следующей задачи.

Задача 2. *Найти замену переменных, приводящую квадратичные формы*

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$$

*и*

$$\Psi(x) = 4\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 + 6\xi_2^2$$

*соответственно к каноническому и диагональному виду.*

Решение.

1°. Исследуем квадратичные формы $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на знаковую определенность. Из критерия Сильвестра и неравенств

$$\det\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = 2 > 0 \; ; \quad \det\begin{Vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{Vmatrix} = -40 < 0$$

заключаем, что $\Phi(x)$ – положительно определенная квадратичная форма, в то время как форма $\Psi(x)$ не является знакоопределенной.

2°. Приведем положительно определенную квадратичную форму $\Phi(x)$ к каноническому виду методом Лагранжа. Поскольку $\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2$ , то, выполнив замену переменных

$$\begin{cases} \xi_1' = \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2' = \sqrt{2}\xi_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_1' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_2' \\ \xi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_2' \end{cases}$$

получим $\Phi(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2$ и соответственно $\Psi(x) = 4\xi_1'^2 + 4\sqrt{2}\xi_1'\xi_2' - 3\xi_2'^2$ .

3°. Введение в $\Lambda^2$ скалярного произведения с единичной матрицей Грама означает, что координаты $\{\xi'_1;\xi'_2\}$ есть координаты евклидова пространства $E^2$ с базисом $\{e'_1,e'_2\}$, где $\|e'_1\|_{e'}=\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix}$; $\|e'_2\|_{e'}=\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}$. Матрица квадратичной формы $\Psi(x)$ в этом базисе $\|\Psi\|_{e'}=\begin{Vmatrix}4 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & -3\end{Vmatrix}$.

Она задает присоединенный самосопряженный оператор, имеющий собственные значения $\lambda_1=5$ и $\lambda_2=-4$, а также ортонормированные собственные векторы

$$\|f_1\|_{e'}=\begin{Vmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{1}{3}\end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \|f_2\|_{e'}=\begin{Vmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{Vmatrix},$$

которые примем за искомый, третий базис $\{e''_1,e''_2\}$.

Графическое представление описанной процедуры показано на рис.1.

4°. Матрица перехода от ортонормированного базиса $\{e_1', e_2'\}$ к ортонормированному базису $\{e_1'', e_2''\}$, в котором $\Phi(x) = \xi_1''^2 + \xi_2''^2$ и $\Psi(x) = 5\xi_1''^2 - 4\xi_2''^2$, ортогональная и имеет вид $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{matrix} \right\|$. Очевидно, что $\det \|S\| = 1$.

Откуда окончательно получаем, что

$$\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1' + \frac{1}{3}\xi_2' \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2, \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1 \quad + \xi_2. \end{cases}$$

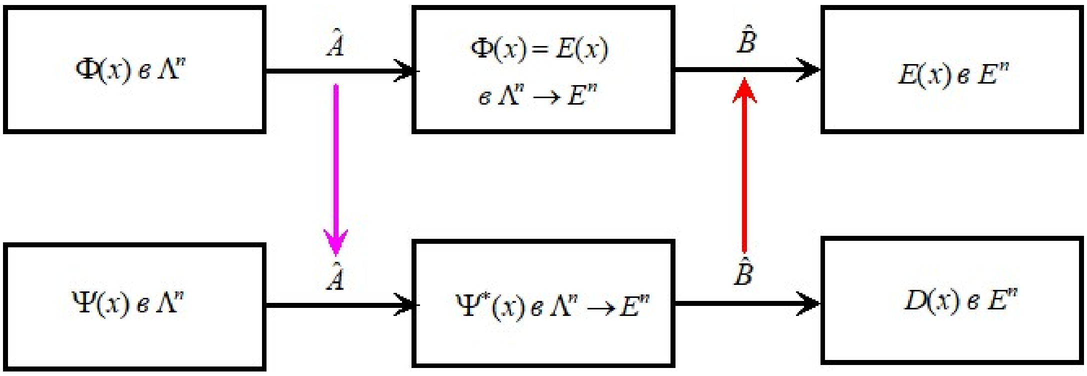


Рис. 1. Одновременная диагонализация пары квадратичных форм.