

Линейные операторы в евклидовом пространстве

Ранее мы рассмотрели оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство в евклидовом пространстве. Однако в этом пространстве можно выделять и другие специфические классы линейных операторов, для определения которых используется операция *скалярного произведения*.

Рассмотрим еще три класса линейных преобразований, существующих только в *евклидовых* пространствах. Это *сопряженные, самосопряженные и ортогональные* операторы.

Для большей наглядности приведем сразу определения этих операторов. А их основные свойства рассмотрим по отдельности.

Определение 1. В евклидовом пространстве E , :

- 1°. Линейный оператор \hat{A}^+ называется *сопряженным* линейному оператору \hat{A} , если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$.
- 2°. Линейный оператор \hat{R} называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.
- 3°. Линейный оператор \hat{Q} называется *ортогональным*, если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Свойства сопряженных операторов

Вначале приведем примеры сопряженных операторов.

Пример 1. Построим оператор, сопряженный линейному оператору дифференцирования $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$, который действует в евклидовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведением $(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)d\tau$.

Для этого воспользуемся правилом интегрирования "по частям", согласно которому имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\hat{A}x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau) d\tau = x(\tau)y(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(-\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) d\tau = (x, \hat{A}^+ y). \end{aligned}$$

Из которых следует, искомым сопряженным оператором будет оператор

$$\hat{A}^+ = -\frac{d}{d\tau}.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство E^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и выясним *связь матриц линейных операторов \hat{A} и \hat{A}^+ в этом базисе.*

Решение: Пусть матрицы операторов \hat{A} и \hat{A}^+ имеют соответственно вид $\|\hat{A}\|_g$ и $\|\hat{A}^+\|_g$, а координатные столбцы элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ –

$$\|x\|_g = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \|y\|_g = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

тогда равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$ можно записать как

$$(\|\hat{A}\|_g \|x\|_g)^T \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \|x\|_g^T \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g \|y\|_g,$$

где $\|\Gamma\|_g$ – базисная матрица.

В силу соотношения $(\|A\| \|B\|)^T = \|B\|^T \|A\|^T$ последнее равенство можно преобразовать к виду $\|x\|_g^T (\|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g) \|y\|_g = 0$, а поскольку это равенство справедливо при любых x и y , то, заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, – нулевая, а из соотношения

$$\|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g = \|O\| \quad \text{следует} \quad \|\hat{A}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g,$$

которое, в частности, для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет вид $\|\hat{A}^+\|_e = \|\hat{A}\|_e^T$.

Теперь сформулируем (без доказательств, которые можно найти в конспектах лекций или других ресурсах) основные свойства сопряженных операторов в виде следующих теорем.

Теорема 1. **Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве E^n имеет единственный сопряженный оператор.**

Теорема 2. **Для любых линейных операторов \hat{A} и \hat{B} , действующих в E , имеет место равенство $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$.**

Теорема 3. **Имеет место равенство $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$.**

Теорема 4. **Ортогональное дополнение области значений оператора \hat{A} в E^n является ядром оператора \hat{A}^+ .**

Теорема 4 допускает любопытную интерпретацию. Если ее условие и утверждение записать в координатной форме, то получится теорема, равносильная теореме Фредгольма, о необходимом и достаточном условии совместности неоднородной системы линейных уравнений. Кому интересно, проверьте это самостоятельно.

Самосопряженные операторы

Линейный оператор \hat{R} называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in E \quad (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

Пример 3. В евклидовом пространстве операторы вида $\hat{A} + \hat{A}^+$, $\hat{A}\hat{A}^+$ и $\hat{A}^+\hat{A}$ будут самосопряженными для любого линейного оператора \hat{A} .

Решение: Действительно, для оператора $\hat{A}^+\hat{A}$, например, мы будем иметь, что $\forall x, y \in E \quad (\hat{A}^+\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^+\hat{A}y)$, откуда и следует его самосопряженность.

А, если в качестве \hat{A} взять из примера 1 оператор $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$, то из предыдущих рассуждений следует, то оператор

$$\hat{A}\hat{A}^+ = \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{d}{d\tau} \right) = -\frac{d^2}{d\tau^2}$$

будет *самосопряженным*. Запомним это!

Сформулируем основные свойства самосопряженных операторов в виде следующих теорем.

- Теорема 1. **Линейный оператор \hat{R} в E^n является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом ортонормированном базисе симметрическая.**
- Теорема 2. **Все собственные значения самосопряженного оператора \hat{R} в E^n вещественные числа.**
- Теорема 3. **Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.**
- Теорема 4. **Пусть E' – инвариантное подпространство самосопряженного оператора \hat{R} , действующего в E , и пусть E'' – ортогональное дополнение к E' в E . Тогда E'' – также инвариантное подпространство оператора \hat{R} .**
- Теорема 5. **Для любого самосопряженного оператора \hat{R} в E^n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов \hat{R} .**
- Теорема 6. **Два самосопряженных оператора \hat{A} и \hat{B} имеют общую систему собственных векторов в E^n тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.**

И мы не планировали здесь доказывать эти теоремы, все же трудно удержаться и не привести доказательство теоремы 3, редкое по своей компактности и изящности.

Доказательство теоремы 3.

Пусть для самосопряженного оператора \hat{R} имеют место равенства $\hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1$ и $\hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2$, где ненулевые элементы f_1 и f_2 – собственные векторы оператора \hat{R} и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – соответствующие им собственные значения. Умножив эти равенства соответственно: первое – скалярно справа на f_2 , второе – скалярно слева на f_1 , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1 (f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2). \end{cases}$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что \hat{R} – самосопряженный оператор (т.е. левые части равны), приходим к равенству $(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$, откуда, в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(f_1, f_2) = 0$.

В качестве упражнения проверьте справедливость следующих следствий:

- Следствие 1. **(Признак самосопряженности):** если линейный оператор в E^n имеет симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряженный.
- Следствие 2. **Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.**
- Следствие 3. **Если $\|R\|$ симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица $\|Q\|$ такая, что матрица $\|D\| = \|Q\|^{-1}\|R\|Q\| = \|Q\|^T\|R\|Q\|$ диагональная.**

Ортогональные операторы

Линейный оператор \hat{Q} , действующий в евклидовом пространстве E , называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из этого определения следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними. Действительно,

$$\begin{aligned} |\hat{Q}x| &= \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|; \\ \cos \psi &= \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{|\hat{Q}x| |\hat{Q}y|} = \frac{(x, y)}{|x| |y|} = \cos \varphi; \quad x, y \in E, \end{aligned}$$

где φ – величина угла между ненулевыми элементами x и y , а ψ – величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$.

Сформулируем (без доказательств) основные свойства ортогональных операторов в виде следующих теорем.

- Теорема 7. Если ортогональный оператор \hat{Q} имеет сопряженный оператор, то он имеет и обратный оператор, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$.
- Теорема 8. Матрица ортогонального оператора в E^n в каждом ортонормированном базисе ортогональная.
- Теорема 9. Любой линейный оператор \hat{A} в E^n с $\det \|\hat{A}\| \neq 0$ может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор \hat{Q} ортогональный, а оператор \hat{R} – самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.

Теорема 9 в математической литературе часто именуется теоремой о полярном разложении.

В качестве упражнения проверьте справедливость следующих следствий:

- Следствие 3. Операторы \hat{Q}^+ и \hat{Q}^{-1} также ортогональные.
- Следствие 4. (Признак ортогональности) Для того чтобы линейный оператор в E^n был ортогональным, достаточно, чтобы его матрица была ортогональной в некотором ортонормированном базисе.