Евклидово пространство

Аксиоматика и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия *длины*, *расстояния*, *величины угла* и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в этом пространстве дополнительно ввести операцию, называемую *скалярным произведением*, описываемую следующими правилами.

Определение 1. Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое символом (x, y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(x, x) \ge 0$, причем $(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = o$,

тогда говорят, что задано *евклидово пространство E*.

Замечание: аксиомы 1)–4) в совокупности означают, что скалярное произведение есть *форма*

- *билинейная* (что следует из аксиом 2) и 3)) ,
- *симметричная* (следует из аксиомы 1) ,
- которая порождает *положительно определенную квадратичную* (следует из аксиомы 4) *форму*.

Любая билинейная форма, обладающая данными свойствами, может быть использована в качестве скалярного произведения. При *разных* способах введения скалярного произведения, будут получаться *разные* евклидовы пространства

Пример 1.

1°. Если в в Λ^n − пространстве n-мерных столбцов $x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$; $y = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\|$, ввести скалярноем произведение, определяемое формулой $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, то мы получим евклидово пространство E^n.

2°. Евклидовым будет пространство непрерывных для $\tau \in [\alpha, \beta]$ функций, со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau$. (1)

Определение 2. В евклидовом пространстве E назовем:

1) *нормой* (или *длиной*) элемента x число $|x| = \sqrt{(x, x)}$;
2) *расстоянием* между элементами x и y число $|x - y|$.

Из аксиоматики евклидова пространства следуют неравенства:

– $\forall\, x, y \in E$ **имеет место** $|(x, y)| \le |x||y|$ *неравенство Коши-Буняковского*.

– $\forall\, x, y \in E$ **имеет место** $|x + y| \le |x| + |y|$ *неравенство треугольника*.

Проверим первое из них: имеем

$$(x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - 2\tau(x, y) + \tau^2 (y, y) \ge 0 \quad \forall\, \tau, \quad \forall x, y \in E.$$

Данное выражение при произвольных фиксированных $x, y \in E$ есть квадратный трехчлен относительно τ. Этот трехчлен *неотрицателен* $\forall\, \tau \in R$, значит, его дискриминант *не положителен*. То есть

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) = (x, y)^2 - |x|^2 |y|^2 \le 0.$$

Откуда и следует справедливость неравенства Коши-Буняковского.

Заметим, что неравенства Коши–Буняковского и треугольника для евклидова пространства могут иметь довольно экзотический вид, например такой как, скажем, в примере 1-2°

$$\left| \int\limits_\alpha^\beta x(\tau) y(\tau)\, d\tau \right| \le \sqrt{\int\limits_\alpha^\beta x^2(\tau) d\tau} \sqrt{\int\limits_\alpha^\beta y^2(\tau) d\tau} \;, \quad \sqrt{\int\limits_\alpha^\beta \big(x(\tau) + y(\tau) \big)^2 d\tau} \le \sqrt{\int\limits_\alpha^\beta x^2(\tau)\, d\tau} + \sqrt{\int\limits_\alpha^\beta y^2(\tau)\, d\tau} \;.$$

Определение 2. В евклидовом пространстве E *величиной угла* между ненулевыми элементами x и y назовем число $\alpha \in [0, \pi]$, удовлетворяющее соотношению $\cos\alpha = \dfrac{(x, y)}{|x||y|}$.

В евклидовом пространстве E элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

В конечномерном евклидовом пространстве E^n базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ будем называть *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = [1, n].$

Имеет место теорема утверждающая, что

во всяком евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис.

Доказательство этой теоремы основано на том, что для любого набора n линейно независимых элементов можно построить совокупность попарно ортогональных элементов, каждый из которых есть линейная комбинация элементов исходного набора.

При этом оказывается, что затраты вычислительных ресурсов на выполнение ортогонализации существенно снижаются (по сравнению, скажем, с методом неопределенных коэффициентов), если применить так называемую *процедуру Грама-Шмидта*, суть которой поясним, рассмотрев

Пример 2. Пусть в линейном пространстве алгебраических многочленов степени не выше, чем 2, т.е. вида $P(x) = \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2$, скалярное произведение задано формулой (1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. То есть, мы имеем трехмерное евклидово пространство E^3.

Решение: Возьмем в этом пространстве три линейно независимых элемента, образующих стандартный базис: $\left\{ g_{(1)}(x) = 1, \quad g_{(2)}(x) = x, \quad g_{(3)}(x) = x^2 \right\}$. Эти элементы не являются попарно ортогональными, так как, например,

$$(g_{(1)}(x), g_{(2)}(x)) = \int\limits_0^1 1 \cdot x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0 \; .$$

Использование процедуры *Грама-Шмидта* для ортогонализации данного набора заключается в следующем.

За первый элемент искомого ортогонального набора $e_{(1)}$ примем первый элемент исходного набора. То есть, $e_{(1)} = g_{(1)} = 1$.

Второй элемент ортогонального набора будем искать в виде линейной комбинации $e_{(2)} = g_{(2)} + \lambda_{2,1}\, e_{(1)}$, где $\lambda_{2,1}$ константа, значение которой подберем так, чтобы выполнялось условие *ортогональности* . $(e_{(2)}, e_{(1)}) = 0$. (2)

В нашем случае $e_{(2)}(x) = x + \lambda_{2,1} \cdot 1$, а условие ортогональности (2) будет

$$(e_{(2)}, e_{(1)}) = (g_{(2)} + \lambda_{2,1}\, e_{(1)}, e_{(1)}) = (g_{(2)}, e_{(1)}) + \lambda_{2,1}\,(e_{(1)}, e_{(1)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,1} = -\frac{(g_{(2)}, e_{(1)})}{(e_{(1)}, e_{(1)})} .$$

Что дает окончательно

$$(e_{(1)}, e_{(1)}) = \int\limits_0^1 1 \cdot 1\, dx = x\Big|_0^1 = 1 , \quad (g_{(2)}, e_{(1)}) = \int\limits_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,1} = -\frac{1}{2} .$$

Итак, $e_{(2)}(x) = x - \dfrac{1}{2}$.

Теперь, внимание! Основная идея метода *Грама-Шмидта*:

третий элемент ортогонального набора будем искать в виде:

$$e_{(3)} = g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)} \ . \tag{3}$$

Значения констант $\lambda_{3,1}$ и $\lambda_{3,1}$ подберем так, чтобы выполнялись одновременно условия ортогональности

$$(e_{(3)}, e_{(1)}) = 0 \quad \text{и} \quad (e_{(3)}, e_{(2)}) = 0 \ . \tag{4}$$

Подставив формулу (3) в равенства (4) , получим

$$(e_{(3)}, e_{(1)}) = (g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}, e_{(1)}) = (g_{(3)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,1}(e_{(1)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,2}(e_{(2)}, e_{(1)}) = 0 \ ,$$
$$(e_{(3)}, e_{(2)}) = (g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}, e_{(2)}) = (g_{(3)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,1}(e_{(1)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,2}(e_{(2)}, e_{(2)}) = 0 \ .$$

Эти равенства за счет формулы (2) упрощаются до

$$(g_{(3)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,1}(e_{(1)}, e_{(1)}) = 0 \ , \qquad (g_{(3)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,2}(e_{(2)}, e_{(2)}) = 0$$

и мы получаем $\lambda_{3,1} = -\dfrac{(g_{(3)}, e_{(1)})}{(e_{(1)}, e_{(1)})}$ и $\lambda_{3,2} = -\dfrac{(g_{(3)}, e_{(2)})}{(e_{(2)}, e_{(2)})}$.

Осталось подсчитать три скалярных произведения (так как $(e_{(1)}, e_{(1)}) = 1$ найдено раньше) .

Имеем $(g_{(3)}, e_{(1)}) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,1} = -\dfrac{1}{3}$.

Аналогично

$$(e_{(2)}, e_{(2)}) = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left.\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{12},$$

$$(g_{(3)}, e_{(2)}) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,2} = -1 .$$

Теперь находим из (3)

$$e_{(3)}(x) = g_{(3)}(x) + \lambda_{3,1}\, e_{(1)}(x) + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Ортогональная система построена.

Наконец, следует сделать нормировку. Соответствующая ортонормированная система, очевидно, будет иметь вид

$$\left\{ \tilde{e}_{(1)}(x)=\frac{e_{(1)}(x)}{|e_{(1)}(x)|}, \qquad \tilde{e}_{(2)}(x)=\frac{e_{(2)}(x)}{|e_{(2)}(x)|}, \qquad \tilde{e}_{(3)}(x)=\frac{e_{(3)}(x)}{|e_{(3)}(x)|} \right\},$$

поскольку $\left|\dfrac{e_{(j)}(x)}{|e_{(j)}(x)|}\right|=1 \quad \forall j=1,2,3$.

Нормы элементов подсчитаем по формуле пункта 1) определения 2. Получим

$$|e_{(1)}(x)|=\sqrt{\left(e_{(1)}(x),e_{(1)}(x)\right)}=\sqrt{1}=1, \qquad |e_{(2)}(x)|=\sqrt{\left(e_{(2)}(x),e_{(2)}(x)\right)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$|e_{(3)}(x)|=\sqrt{\left(e_{(3)}(x),e_{(3)}(x)\right)}=\sqrt{\int\limits_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx}=\frac{\sqrt{5}}{30}.$$

В итоге, после нормировки приходим к ортонормированному базису

$$\left\{ \tilde{e}_{(1)}(x)=1, \qquad \tilde{e}_{(2)}(x)=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right), \qquad \tilde{e}_{(3)}(x)=6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right) \right\}.$$

К найденному решению сделаем следующие замечания.

1) Метод ортогонализации Грама-Шмидта можно использовать также в случае, когда пространство E не имеет базиса, а исходный набор $\{g_{(n)}\}$ является *последовательностью* элементов в этом пространстве. Алгоритм остается тем же.

   Действительно, пусть мы ортогонализовали первые k элементов последовательности и получили попарно ортогональные элементы $\{e_{(1)},\ e_{(2)},\ \ldots,\ e_{(k)}\}$.

   Следующий ортогонализированный элемент ищем по формуле

$$e_{(k+1)} = g_{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k+1,j} e_{(j)} \ , \tag{5}$$

   в которой каждый из коэффициентов $\lambda_{k+1,m}$ находится путем скалярного умножения обеих частей равенства (5) на элемент $e_{(m)}$. При этом в силу $(e_{(j)}, e_{(m)}) = 0,$ если $m \neq j \ \forall m \in [1, k]$, и условия ортогональности $(e_{(k+1)}, e_{(m)}) = 0$, получаем $\lambda_{k+1,m} = -\dfrac{(g_{(k+1)}, e_{(m)})}{(e_{(m)}, e_{(m)})}$.

   Здесь условие $(e_{(m)}, e_{(m)}) \neq 0$ следует (проверьте это самостоятельно) из предположения о линейной независимости элементов последовательности $\{g_{(n)}\}$.

2) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта может быть также применен и к линейно зависимой системе элементов евклидова пространства. В этом случая в итоге некоторых шагов могут получаться нулевые элементы, отбрасывание которых позволяет продолжить процесс ортогонализации.

Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ в евклидовом пространстве является *матрица Грама*.

Определение 3. В евклидовом пространстве E *матрицей Грама* системы элементов $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ называется симметрическая матрица вида

$$\|\Gamma\|_f = \begin{Vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \cdots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \cdots & (f_2, f_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \cdots & (f_k, f_k) \end{Vmatrix}.$$

Пусть в E^n дан базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, в силу определения 1 представимо в виде

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)$ $\forall i, j = [1, n]$ – компоненты матрицы $\|\Gamma\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама*.

Мы ранее отмечали, что эта матрица симметрическая, в силу коммутативности скалярного произведения, и является матрицей симметричной билинейной формы, задающей скалярное произведение. Тогда, используя координатный вид билинейной формы, координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x,y) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Gamma \|_g \| y \|_g = \| \xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n \| \begin{Vmatrix} (g_1,g_1) & (g_1,g_2) & \dots & (g_1,g_n) \\ (g_2,g_1) & (g_2,g_2) & \dots & (g_2,g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_n,g_1) & (g_n,g_2) & \dots & (g_n,g_n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix},$$

где $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные представления (столбцы) элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе $\| \Gamma \|_e = \| E \|$, и, следовательно, формула для скалярного произведения принимает вид $(x,y) = \| x \|_e^{\mathrm{T}} \| y \|_e = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

Матрица Грама обладает следующими важными свойствами.

Теорема 1. **Система элементов $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ в E линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Следствие 1. **Для базисной матрицы Грама $\|\Gamma\|_g$ в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$.**

Теорема 2. **Система элементов $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ в E линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.**

Свойства матрицы Грама могут быть использованы при решении различных задач. Продемонстрируем это, решив

Пример 3. Доказать, что

$$\det\begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{Vmatrix} > 0. \tag{6}$$

Решение: в E − линейном пространстве функций непрерывных на отрезке $[0,1]$, со скалярным произведением заданным формулой (1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, рассмотрим линейно независимые элементы $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Для этих элементов найдем всевозможные попарные склярные произведения

$$(x^p, x^q) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \left.\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+q+1}.$$

Образуем из них матрицу Грамма, имеющую при $p = 0,1,\ldots,n-1$ и $q = 0,1,\ldots,n-1$ вид матрицы в формуле (6).

Поскольку выбранные нами элементы линейно независимы (докажите это самостоятельно, использовав , например, теорему Крамера), то в силу теоремы 1 детерминант этой матрицы положителен.

Ортогональные матрицы. Ортогональные проекции и ортогональные дополнения в евклидовом пространстве

Операция *скалярное произведение* в евклидовом пространстве позволяет существенно расширить область применения линейных операторов и квадратичных форм, однако это требует введения нескольких дополнительных понятий.

Определение 1. Квадратная матрица $\|Q\|$, удовлетворяющая равенству $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной*.

Ясно, что решение систем линейных уравнений, у которых основная матрица ортогональная, просто удовольствие по сравнению, скажем, с решением по методу Крамера. Полезно также помнить такие свойства ортогональных матриц, как:

$$\|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|E\| \quad \text{и} \quad \det\|Q\| = \pm 1 .$$

Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. **Ортогональные матрицы (и только они!) в E^n могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.**

Действительно, пусть имеются два различных ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ в E^n с матрицей перехода $\|S\|$ от первого базиса ко второму.

В этих базисах матрица Грама *единичная*, поэтому из соотношения $\|\Gamma\|_{e'} = \|S\|^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_e \|S\|$ следует равенство $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \|E\| \|S\|$, или $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \|S\|$. А, поскольку матрица перехода $\|S\|$ невырожденная, то имеем $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2. **Собственные значения линейного преобразования, имеющего в ортонормированном базисе E^n ортогональную матрицу, равны по модулю единице.**

Попробуйте доказать эту теорему (или найдите в каком-нибудь ресурсе ее доказательство) в качестве упражнения.

Далее, пусть в E задано подпространство E_1. Рассмотрим множество $E_2 \subset E$ элементов x, ортогональных всем элементам из E_1. Тогда можно дать

Определение 2. В евклидовом пространстве E множество E_2 − совокупность элементов x, таких, что $(x,y)=0 \quad \forall y \in E_1 \subset E$ называется *ортогональным дополнением* множества E_1.

При этом оказываются справедливыми

Теорема 3. **Если E_2 – ортогональное дополнение подпространства $E_1 \subset E$, то E_1 является ортогональным дополнением E_2.**

и

Теорема 4. **Ортогональное дополнение k-мерного подпространства $E_1 \subset E^n$ является подпространством размерности $n-k$.**

В обычном трехмерном векторном пространстве примером ортогонального дополнения к координатной плоскости Oxy служит координатная ось Oz. Верно и обратное.

Наконец, дадим

Определение 3. В евклидовом пространстве E элемент y называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство E^*, если

1°. $y \in E^*$;

2°. $(x-y,u)=0 \quad \forall u \in E^*$.

Весьма полезной для многих приложений оказывается

Теорема 5. **Если $E^* \subset E$ является k-мерным подпространством, то элемент y – ортогональная проекция $x \in E$ на E^* – существует и единственен**.

Разберем ее доказательство.

Если в E^* существует базис $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, то элемент $y \in E^*$ может быть представлен в виде $y = \sum_{i=1}^{k} \xi_i g_i$.

Условие $(x-y,u)=0 \ \forall u \in E^*$ равносильно ортогональности вектора $x-y$ *каждому* из базисных элементов подпространства E^*, то есть

$$(x-y, g_j) = 0 \ \forall j=[1,k],$$

и, следовательно, числа ξ_i , $i=[1,k]$ могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$(x - \sum_{i=1}^{k} \xi_i g_i, g_j) = 0 \quad \forall j=[1,k] \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{k} (g_i, g_j)\xi_i = (x, g_j) \quad \forall j=[1,k].$$

Поскольку основная матрица этой системы (как базисная матрица Грама набора линейно независимых элементов $g_1, g_2, ..., g_k$) *невырожденная*, то по теореме *Крамера* решение данной системы существует и единственно.

Отметим также, что если базис $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ в подпространстве E^* ортонормированный, то ортогональная проекция элемента x на E^* есть элемент вида $y = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$.

Пример 3. В евклидовом пространстве E^4 с исходными стандартными ортонормированным базисом и скалярным произведением найти ортогональную проекцию элемента $x = \begin{Vmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 11 \end{Vmatrix}$

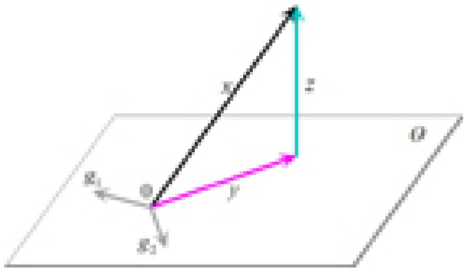
1) на Θ − линейную оболочку элементов $g_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $g_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$;

2) на ортогональное дополнение к Θ.

Решение: 1°. Заметим (обоснуйте это), что элементы g_1 и g_2 не только порождают линейную оболочку Θ, но и образуют в ней ортогональный базис. Размерность Θ в данной задаче равна 2.

2°. Согласно определению 3 и правилу треугольника имеем такие соотношения:

пусть y − ортогональная проекция x на Θ, тогда

	$z = x - y$, $y = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, $z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$.

Условие ортогональности z каждому элементу из Θ будет иметь вид:

$$\begin{cases} (g_1, z) = 0, \\ (g_2, z) = 0 \end{cases} \quad \forall z \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} (g_1, g_1)\lambda_1 + (g_1, g_2)\lambda_2 = (g_1, x), \\ (g_2, g_1)\lambda_1 + (g_2, g_2)\lambda_2 = (g_2, x). \end{cases} \tag{1}$$

Найдя λ_1 и λ_2 из системы (1), мы получим y − искомую ортогональную проекция x на линейную оболочку Θ .

Для того, чтобы получить систему (1), вычислим следующие пять скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
(g_1, g_1) &= (-1)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &&= 2, \\
(g_1, g_2) &= (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 &&= 0, \\
(g_2, g_2) &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 &&= 21, \\
(g_1, x) &= (-1)(-4) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 11 &&= 2, \\
(g_2, x) &= 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 11 &&= 21,
\end{aligned}$$

Тогда система (1) будет иметь вид и, соответственно, очевидное решение

$$\begin{cases} 2 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 2, \\ 0 \cdot \lambda_1 + 21 \cdot \lambda_2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1.$$

Отметим, что диагональность основной матрицы данной системы есть следствие ортогональности элементов g_1 и g_2.

Теперь находим ответ для первого вопроса задачи: ортогональная проекция элемента на линейную оболочку элементов g_1 и g_2 будет равна $y = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. то есть
$$y = 1 \cdot \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + 1 \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

3°. Ответ на второй вопрос уже практически получен, если заметить, что ортогональное дополнение к Θ (в силу определения 2) есть линейная оболочка элемента $z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$.

Покажите самостоятельно, что из теоремы 3 следует, что ортогональной проекцией элемента x на ортогональное дополнение к Θ и будет именно элемент вида $z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$.

При решении задач, требующих нахождения ортогональной проекции на некоторое подпространство, следует помнить, что подпространство может задаваться *не только как* линейная оболочка каких-то элементов, но также при помощи *однородной системы линейных уравнений.*

Для лучшего понимания этого факта попробуйте (в качестве упражнения) решить

Пример 4. В евклидовом пространстве E^4 с исходным ортонормированным базисом и стандартным скалярным произведением найти y − ортогональную проекцию элемента $x = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{Vmatrix}$ на Θ − подпространство, заданное системой линейных уравнений $\begin{cases} -\xi_1 \qquad - 2\xi_3 - \xi_4 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 \qquad = 0. \end{cases}$

В этой задаче у меня получился ответ $y = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Пример 5. В евклидовом пространстве E^4 со стандартным скалярным произведением в некотором ортонормированном базисе однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

задает *подпространство* E^*. Найти в этом базисе матрицу линейного преобразования, являющимся ортогональным проектированием элементов E^4 на E^*.

Решение:

1°. За базис подпространства E^* можно принять пару элементов g_1 и g_2, координатные представления которых в исходном базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ являются линейно независимыми решениями однородной системы линейных уравнений, задающей E^*, например,

$$\| g_1 \|_e = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \| g_2 \|_e = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

2°. Поскольку $\dim E^* = 2$, то размерность ортогонального дополнения к E^* согласно теореме 3 также равна 2. За базис в этом ортогональном дополнении удобно принять элементы g_3 и g_4, такие, что $\| g_3 \|_e = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}; \quad \| g_4 \|_e = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$

поскольку они линейно независимы и ортогональны каждому элементу из подпространства E^*, как образованные из коэффициентов, заданной в условии задачи системы линейных уравнений.

3°. Элементы g_1, g_2, g_3 и g_4 линейно независимые по построению и образуют базис в E^4, и каждый элемент из E^4 может быть представлен и притом единственным образом как линейная комбинация элементов этого базиса $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Искомый оператор $\hat{A}$ ортогонального проектирования элементов E^4 на E^* должен, очевидно, удовлетворять соотношениям

$$\hat{A}g_1 = g_1; \quad \hat{A}g_2 = g_2; \quad \hat{A}g_3 = o; \quad \hat{A}g_4 = o,$$

в силу которых его матрица в базисе $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ будет иметь следующий вид:

$$\| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4°. С другой стороны, матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ к базису $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$$\| S \| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

но поскольку $\| \hat{A} \|_g = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_e \| S \|$ и, следовательно, $\| \hat{A} \|_e = \| S \| \| \hat{A} \|_g \| S \|^{-1}$, то, воспользовавшись правилами вычисления произведения матриц, найдем, что

$$\| \hat{A} \|_e = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{Vmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{Vmatrix}.$$