Инвариантные подпространства линейных преобразований

Определение

Пусть линейный оператор $\hat{A}$, действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для $\hat{A}$ принадлежат L, т.е. $\hat{A}$ есть линейное *преобразование* пространства L. Тогда

> Множество Ω называется *инвариантным подпространством преобразования* $\hat{A}$, если $\forall x \in \Omega \to \hat{A}x \in \Omega$. (1)

Теорема. **Совокупность всех собственных векторов, отвечающих некоторому λ – собственному значению линейного преобразования $\hat{A}$, дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ, является *инвариантным* подпространством $\hat{A}$.**

Доказательство.

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых, не равных нулю одновременно чисел α и β:

$$\hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) \quad = \quad \alpha\hat{A}f_1 + \beta\hat{A}f_2 \quad = \quad \alpha\lambda f_1 + \beta\lambda f_2 \quad = \quad \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2),$$

что и показывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Теорема **Всякое инвариантное собственное подпространство линейного преобразования $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством линейного преобразования $\hat{B}$, если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.**

Доказательство.

Пусть Λ^* – инвариантное собственное подпространство $\hat{A}$, то есть $\hat{A}f = \lambda f \quad \forall f \in \Lambda^*$. Но тогда справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$, а в силу коммутируемости и линейности $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будет верно и $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f)$ при $\forall f \in \Lambda^*$.

Последнее условие означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^*$ при $\forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* – инвариантное подпространство оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Пример 1. Найти в L^3 все двумерные инвариантные подпространства линейного преобразования $\hat{A}$,

для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

Решение.

1) Для линейного преобразования $\hat{A}$ координаты образов связаны с координатами прообразов равенством

$$\|x^*\| = \|\hat{A}\| \|x\|, \qquad (2)$$

где $\|x\| = \| \xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \|^{\mathrm{T}}$ и $\|x^*\| = \| \xi_1^* \ \xi_2^* \ \xi_3^* \|^{\mathrm{T}}$.

Пусть искомое подпространство задается уравнением

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0\,, \quad \text{где} \ |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0\,.$$

Допустимость такого описания следует из того, что двумерное подпространство в L^3 можно задать при помощи однородной системы линейных уравнений с тремя неизвестными, ранг основной матрицы которой равен единице.

В этом случае наша задача сводится к нахождению значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Из определения инвариантности (1) следует, что координаты образов точек искомого подпространства должны удовлетворять уравнению

$$\alpha_1\xi_1^* + \alpha_2\xi_2^* + \alpha_3\xi_3^* = 0\,. \qquad (3)$$

2) Матричное равенство (2) в координатах принимает форму системы равенств вида:

$$\begin{cases} \xi_1^* = -2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3, \\ \xi_2^* = \ \ 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3, \\ \xi_3^* = \ \ 2\xi_1 + 2\xi_2 - \ \xi_3. \end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\alpha_1(-2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3) + \alpha_2(2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3) + \alpha_3(2\xi_1 + 2\xi_2 - \ \xi_3) = 0\,,$$

а, после перегруппировки слагаемых,

$$\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = 0\ , \qquad (5)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_3 = \ \ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 \ - \alpha_3. \end{cases} \qquad (6)$$

Заметим, что, если (3) есть уравнение, задающее искомое подпространство, то и (5) также будет его описанием.

При этом, в силу однородности уравнений (3) и (5), коэффициенты в этих уравнениях могут отличаться на один и тот же постоянный множитель. Иначе говоря,

$$\exists k : \qquad \beta_1 = k\alpha_1 ; \;\; \beta_2 = k\alpha_2 ; \;\; \beta_3 = k\alpha_3 .$$

Если эти равенства подставить в (6), то мы получим условия, задающие искомые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, следующего вида:

$$\begin{cases} k\alpha_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 , \\ k\alpha_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 , \\ k\alpha_3 = \;\; 3\alpha_1 - 3\alpha_2 \;\; - \alpha_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-2-k)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + (-1-k)\alpha_3 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Рассматривая (7) как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, нетрудно заметить, что условие существования у (7) ненулевых решений (см. теорему о максимальном числе линейно независимых частных решений однородной СЛУ), вытекающее из ограничения

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0 \ ,$$

имеет вид

$$\det \left\| \begin{matrix} -k-2 & 2 & 2 \\ -4 & -k+4 & 2 \\ 3 & -3 & -k-1 \end{matrix} \right\| = 0$$

или $k(k+1)(k-2) = 0$, т.е. ненулевые решения у системы (7) могут существовать лишь при $k = 0, k = -1$ или $k = 2$.

3) Решая последовательно систему (7) при этих конкретных k, мы получим

$$\text{при } k=0 \quad \begin{cases} -2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ -4\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3=0. \end{cases} \Rightarrow \quad \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right\| = C\left\|\begin{matrix}1\\ 1\\ 0\end{matrix}\right\| \quad \forall C\neq 0\,;$$

$$\text{при } k=-1 \quad \begin{cases} -\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ -4\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1-3\alpha_2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right\| = C\left\|\begin{matrix}-2\\ -2\\ 1\end{matrix}\right\| \quad \forall C\neq 0\,;$$

$$\text{при } k=2 \quad \begin{cases} -4\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ -4\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3=0. \end{cases} \Rightarrow \quad \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right\| = C\left\|\begin{matrix}0\\ -1\\ 1\end{matrix}\right\| \quad \forall C\neq 0\,;$$

Используя найденные варианты для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, приходим к заключению, что линейное преобразование имеет три двумерных инвариантных подпространства, задаваемых уравнениями:

$$\xi_1+\xi_2=0\,; \qquad 2\xi_1+2\xi_2-\xi_3=0\,; \qquad \xi_2-\xi_3=0\,. \tag{8}$$

4) Решение задачи нами получено, однако при внимательном анализе возникает следующий вопрос.

Если (3) − это уравнение *образа* подпространства

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0\,,$$

то (7) -это уравнение *прообраза* для этого образа.

Что в этом случае означают равенства $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$? Ведь в этом случае получается, что *любая* точка в L^3 имеет своим образом точку в подпространстве $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Дело в том, что подпространство $\xi_1 + \xi_2 = 0$ есть *область значений* преобразования $\hat{A}$. (Проверьте это самостоятельно, используя, например, теорему Кронекера-Капелли.)

Значит, что и все точки из подпространства $\xi_1 + \xi_2 = 0$ имеют свои образы в этом же подпространстве. Значит оно инвариантное.

Выходя за рамки рассмотренной задачи, можно также отметить, что данное преобразование имеет инвариантные подпространства с размерностью, отличной от 2.

Во-первых, инвариантными подпространствами для рассматриваемого преобразования формально будут:

- *нулевое* подпространство, состоящее только из нулевого элемента, (размерности 0);
- само *все пространство* L^3 (размерности 3);
- каждое *собственное* подпространство (размерности 1).

Проверьте самостоятельно справедливость этих утверждений в условиях рассмотренной задачи.

В заключение, обратим внимание на еще одну, не сразу бросающуюся в глаза, некоторую "нестыковку" в формулах (8).

Странным может показаться, например то, что третье инвариантное подпространство $\xi_2 - \xi_3 = 0$ (по определению состоящее из каких-то значений преобразования $\hat{A}$) имеет уравнение очевидно не совпадающее с уравнением $\xi_1 + \xi_2 = 0$ − множества всех значений (образов) этого преобразования.

Дело в том, что совпадения подпространств $\xi_2 - \xi_3 = 0$ и $\xi_1 + \xi_2 = 0$ в данной задаче не требуется. Достаточно, что бы все образы точек из $\xi_2 - \xi_3 = 0$ принадлежали множеству значений $\hat{A}$, то есть, удовлетворяли и $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Проверим, что это так. Найдем формулу для произвольного элемента инвариантного подпространства $\xi_2 - \xi_3 = 0$. Для этого решим систему однородных линейных уравнений вида

$$0 \cdot \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \ ,$$

приняв за основное неизвестное ξ_2, а за свободные − ξ_1 и ξ_3. Тогда получим, что

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| + C_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \quad \forall C_1, C_2 . \tag{9}$$

Заметим, что *образы базисных элементов* полученной линейной оболочки (9) будут равны соответственно

$$\left\|\begin{matrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right\| \qquad \text{и} \qquad \left\|\begin{matrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

то есть, они *ненулевые*, *коллинеарные* друг другу и *принадлежащие* $\xi_1 + \xi_2 = 0$ − подпространству множеству значений $\hat{A}$.

Это означает, что образы любых точек из инвариантного подпространства удовлетворяют одновременно, как уравнению $\xi_2 - \xi_3 = 0$, так и $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Иначе говоря, эти образы в своей совокупности образуют одномерное подпространство одновременно в двумерных подпространствах $\xi_2 - \xi_3 = 0$ и $\xi_1 + \xi_2 = 0$.