

**СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ****Определение**

Пусть линейный оператор \hat{A} , действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для \hat{A} принадлежат L , т.е. \hat{A} есть *линейное преобразование* пространства L . Тогда

Собственным вектором линейного преобразования \hat{A} , отвечающему собственному значению λ , называется ненулевой элемент $f \in L$ такой, что

$$\hat{A}f = \lambda f. \quad (1)$$

Итак, f это ненулевой элемент пространства L , образ которого при действии на него \hat{A} , есть произведение числа λ (вообще говоря, комплексного) на этот же элемент f .

В общем случае универсальных способов описания или нахождения собственных векторов и собственных значений нет. Для их нахождения приходится использовать свойства конкретного линейного пространства и линейного преобразования.

Например, для оператора дифференцирования $\hat{A} = \frac{d}{dx}$, действующего в линейном пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равенство (1) принимает вид *дифференциального уравнения*

$$\frac{df}{dx} = \lambda f.$$

Собственным вектором в этом случае является каждое, не равное тождественно нулю, решение этого уравнения, т.е. *функция* вида $f(x) = Ce^{\lambda x} \quad \forall C \neq 0$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что слово "вектор" в термине "собственный вектор" есть лишь дань исторически сложившейся традиции. Собственное значение в данном примере есть любое комплексное число.

Укажем (это теоремы!) важные свойства собственных векторов, вытекающих из определения (1):

- 1) совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению (и дополненная нулевым элементом) является *инвариантным подпространством* преобразования \hat{A} , называемым *собственным подпространством*;
- 2) *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Забегая вперед, поясним:

подпространство $\Omega \subseteq \Lambda$ называется *инвариантным* для линейного оператора \hat{A} , если

$$\hat{A}x \in \Omega \quad \forall x \in \Omega.$$

Обратите также внимание на то, что свойства 1) и 2) имеют место в любом Λ , не обязательно конечномерном.

Случай конечномерного пространства

Хотя универсального "рецепта" нахождения собственных векторов нет, приятным исключением оказывается случай, когда пространство $L = L^n$ конечномерное, т.е. в нем существует базис.

Напомним важные *теоремы* о свойствах конечномерного пространства:

- 1) каждый элемент в L^n (в конкретном базисе) полностью и однозначно описывается своим координатным столбцом, в том числе, верно: $a = b \Leftrightarrow \|a\| = \|b\|$;
- 2) операции с элементами L^n в координатном представлении выполняются по правилам действий с матрицами, для нас важно, что $\|\lambda f\| = \lambda \|f\|$;
- 3) каждое линейное преобразование \hat{A} , имеет координатное представление в виде $\|\hat{A}\|$ – квадратной матрицы n -го порядка, столбцами которой являются координатные столбцы образов базисных векторов.
- 4) для координатного представления образа любого элемента $x \in L^n$, т.е. $\|\hat{A}x\|$, верно равенство $\|\hat{A}x\| = \|\hat{A}\| \|x\|$.

Это позволяет (*только в L^n !*) условие (1) записать в виде:

$$\|\hat{A}\| \|f\| = \lambda \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|\hat{A}\| \|f\| - \lambda \|\hat{E}\| \|f\| = \|o\| ,$$

или же, в силу правил действий с линейными операторами в координатах, как

$$\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| \|f\| = \|o\| , \quad (2)$$

где \hat{E} – единичный (тождественный) оператор, а $\|o\|$ – нулевой столбец, т.е. координатное представление нулевого элемента $o \in L^n$.

Рассмотрим теперь (2) в развернутом (координатном) виде.

$$\text{Пусть } \|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|f\| = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (2) запишется так:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \dots + \alpha_{1n}\phi_n = 0, \\ \alpha_{21}\phi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\phi_2 + \dots + \alpha_{2n}\phi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\phi_1 + \alpha_{n2}\phi_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \lambda)\phi_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) состоит из n *нелинейных* уравнений с $n+1$ неизвестным, решить которую можно алгоритмом, использующим специфику ее вида.

Идея этого алгоритма состоит в том, что, если в (3) неизвестную λ принять за *параметр* (мы считаем, λ как бы известной, но могущей иметь разные значения, величиной), то относительно компонент столбца $\|f\|$ система (3) оказывается *линейной и однородной*, с основной квадратной матрицей $\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|$ порядка n .

Из теоремы Крамера следует, что при λ , удовлетворяющих условию

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| \neq 0$$

решение системы (3) существует и единственно.

В этом случае очевидно, что (3) имеет единственное решение $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = 0$, которое не может быть решением исходной задачи, поскольку собственный вектор *ненулевой по определению*.

Рассмотрим остающийся случай $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| = 0$. Тут теорема Крамера ничем помочь не может, поэтому воспользуемся другой известной теоремой о том, что *максимальное* число *линейно независимых* (т.е., ненулевых) частных решений линейной однородной системы (3) равно $n - r$, где r – ранг основной матрицы этой системы.

Откуда следует, что для существования собственного вектора *необходимо* выполнение неравенства $n - r \geq 1$. Т.е., нам нужно, чтобы $\text{rg} \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| \leq n - 1$.

Ранг квадратной матрицы порядка n не может быть больше, чем n , и поэтому данное условие выполнится, если $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| = 0$, поскольку матрица $\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|$ имеет *единственный* минор n -го порядка, равный ее детерминанту.

Откуда следует, что, выбор λ из условия

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\| = 0, \quad (4)$$

обеспечивает существование решения системы (3) с, не равными нулю одновременно, компонентами $\|f\|$. Значит,

в любом *конечномерном* пространстве задача отыскания собственных векторов и собственных значений сводится к решению уравнения (4) и последовательному (отдельно для *каждого* найденного λ) решению системы (3).

Сообщим также, что:

уравнение (4) принято называть *характеристическим*.

Напомним при этом, что матрица любого линейного преобразования \hat{A} , действующего в L^n , квадратная, порядка n , и ее столбцами являются *образы базисных элементов*, (т.е., результатом действия на них преобразования \hat{A}).

В конечномерном линейном пространстве L^n собственные векторы и собственные значения линейного преобразования \hat{A} обладают следующими свойствами.

- 1) Уравнение (4) есть алгебраическое уравнение n -го порядка, вид и решения которого *одинаковы в любом базисе L^n* .
- 2) В комплексном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование \hat{A} имеет *хотя бы один* собственный вектор.
- 3) В вещественном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование \hat{A} имеет либо *хотя бы один собственный вектор*, либо *двумерное инвариантное подпространство*.
- 4) *Размерность собственного подпространства Ω_λ , отвечающего λ – корню характеристического уравнения кратности k , не меньше, чем 1 и не больше, чем k . То есть $1 \leq \dim(\Omega_\lambda) \leq k$.*
- 5) Матрица линейного преобразования \hat{A} в базисе *из собственных векторов* этого преобразования (в случае, когда такой базис существует) имеет *диагональный* вид, причем на ее *главной диагонали* расположены собственные значения \hat{A} .

Замечание о важности собственных векторов

Доказательство свойства 5)

Допустим, что для некоторого линейного преобразования \hat{A} , заданного в Λ^n , удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1 ; \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2 ; \quad \dots ; \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n .$$

Если принять набор элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ за базис, то данные соотношения можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов:

$$\hat{A}g_k = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \dots + \lambda_k g_k + \dots + 0 \cdot g_n ; \quad \forall k = [1, n] .$$

Поскольку эти разложения (как разложения по базису) обязательно *существуют* и *единственны*, то, исходя из определения *матрицы линейного преобразования*, можно утверждать, что матрица линейного преобразования \hat{A} в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\| \hat{A} \|_f = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} ,$$

благодаря чему исследование свойств преобразования \hat{A} в базисе из собственных векторов оказывается проще.

**Примеры решения задач на тему
"Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований"**

Пример 1. Найти в L^2 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования \hat{A} , для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. 1) Характеристическое уравнение (4) в данном случае имеет вид:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Значит, у данного преобразования одно собственное значение $\lambda_{1,2} = 1$ кратности $k = 2$.

2) Для $\lambda = 1$ составим систему (3):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot \phi_1 + 1 \cdot \phi_2 = 0, \\ 0 \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \|f_{(1)}\| = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Значит, собственным вектором является *любой* элемент L^2 с координатным представлением вида $C \|f_{(1)}\|$, где $C \neq 0$. Одномерным собственным подпространством будет линейная оболочка элемента $f_{(1)}$.

Пример 2. Найти в L^3 собственные значения и собственные векторы линейного пре-

образования \hat{A} , для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. 1. Решим задачу, предположив сначала, что L^3 комплексное линейное пространство.

1) Составим характеристическое уравнение (4)

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ по правилу "треугольников"}$$
$$-(\lambda-1)^2(\lambda+1) + 4(\lambda-1) = 0.$$

или окончательно $(\lambda-1)(\lambda^2+3) = 0$. Его решениями будут числа:
 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$. Это – собственные значения \hat{A} .

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 1$ эта система будет:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а учитывая, что ранг ее матрицы 2, имеем $\begin{cases} \phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3 = 0, \\ \phi_2 = 0. \end{cases}$ Тогда в ка-

честве собственного вектора можно взять $\|f_{(1)}\| = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- 3) Поскольку условие задачи имеет вещественную форму собственные значения λ_2 и λ_3 комплексно сопряженные. По этой же причине (*есть такая теорема*) будут комплексно сопряженными и соответствующие собственные векторы. Поэтому для их нахождения достаточно решить систему (3) только с $\lambda_2 = i\sqrt{3}$.

В этом случае система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{3})\phi_1 - 2\phi_2 & = 0, \\ \phi_2 + (1-i\sqrt{3})\phi_3 & = 0. \end{cases}$$

Конечно, эту систему можно решать методом исключения, однако удобнее просто принять, что $\phi_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда очевидно, что $\phi_1 = 2$ и $\phi_3 = -1$. В итоге получаем собственные векторы

$$\|f_{(2)}\| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|f_{(3)}\| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1+i\sqrt{3} \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Причем здесь $\|f_{(3)}\|$ получается из $\|f_{(2)}\|$ комплексным сопряжением.

2. Решим теперь данную задачу, предполагая, что L^3 вещественное линейное пространство.

В этом случае, выполнив выкладки как в 2), получим, что \hat{A} имеет только одно собственное значение $\lambda_1 = 1$ и, соответствующее ему, одномерное собственное подпространство, являющееся линейной оболочкой элемента

$$\|f_{(1)}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|.$$

По свойству 3) линейного оператора в вещественном линейном конечномерном пространстве

каждое линейное преобразование \hat{A} имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Имеется теорема, о том, что таким инвариантным пространством является *линейная оболочка* элементов

$$\operatorname{Re}\|f_{(2)}\| = \operatorname{Re}\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\|f_{(2)}\| = \operatorname{Im}\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

– вещественных элементов в L^3 . Причем элементы $\operatorname{Re}\|f_{(2)}\|$ и $\operatorname{Im}\|f_{(2)}\|$ линейно независимые (и такая теорема имеется).

Тогда, в рассматриваемой задаче линейное преобразование \hat{A} имеет инвариантное подпространство

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| + C_2 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Найти в вещественном L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования \hat{A} , для которого в стандартном базисе

$$\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. 1) Составляем и решаем характеристическое уравнение (4)

$$\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

раскладывая по первой строке, получаем $(-1-\lambda) \cdot \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

или окончательно $\lambda(\lambda+1)^2 = 0$. Откуда собственные значения суть числа:
 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 0$ система (3) :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или же } \begin{cases} \phi_1 = 0, \\ \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве собственного вектора здесь можно взять $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Поскольку собственное значение -1 имеет кратность 2, то соответствующее ему собственное подпространство может оказаться как одномерным, так и двумерным.

Составляем систему (3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \phi_1 + \phi_2 = 0 \}.$$

Для этой системы $n = 3$, а ранг ее основной матрицы равен 1. Следовательно, эта система будет иметь два линейно независимых (а, значит, и ненулевых) частных решения, являющихся *собственными* векторами.

Принимая ϕ_2 за основную переменную, а ϕ_1 и ϕ_3 за свободные, находим эти решения

$$\| f_{(2)} \| = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти собственные векторы могут служить базисом в *двумерном собственном* подпространстве преобразования \hat{A} , отвечающему собственному значению $\lambda = -1$.

Пример 4. В линейном пространстве квадратных матриц найти собственные значения и собственные векторы оператора \hat{A} , ставящего в соответствие каждой такой матрице результат ее умножения справа на матрицу $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Предварительно напомним, что данное пространство линейное конечномерное, размерности 4. Далее, результатом умножения любой квадратной матрицы 2-го порядка на любую фиксированную квадратную матрицу этого же порядка является опять же квадратная матрица 2-го порядка. Поэтому оператор \hat{A} является *преобразованием*. (В качестве упражнения покажите, что это преобразование *линейное*.)

Таким образом, для нахождения собственных векторов и собственных оказывается возможным использование алгоритма, основанного на решении уравнения (4) и системы уравнений (3).

Для использования этого алгоритма требуется знать матрицу преобразования, которая, в свою очередь, зависит от базиса. Поскольку в условии задачи базис не задан, мы можем выбрать его, исходя из собственных предпочтений.

Напомним, что в 4-х мерном базисом может служить любой упорядоченный набор четырех линейно независимых элементов. Поскольку мы рассматриваем линейное пространство матриц размера 2×2 , то этот набор может, например, иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|; \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|; \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|; \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \right\}.$$

Из очевидного равенства

$$\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \right\| = \alpha_1 \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| + \alpha_2 \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| + \alpha_3 \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| + \alpha_4 \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \quad (5)$$

следует, что координатным представлением каждой матрицы размера 2×2 в нашем базисе будет служить 4-х компонентный столбец $\left\| \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \right\|^T$.

Найдем теперь матрицу преобразования, указанного в условии задачи. Напомним, что матрицей линейного преобразования линейного 4-х мерного служит квадратная матрица размера 4×4 , столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.

В нашем случае образы базисных элементов определяются так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & -2 \end{pmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

с координатным столбцом $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}^T$

Из полученных координатных представлений формируем матрицу преобразования \hat{A}

$$\|\hat{A}\| = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

2) Теперь составляем характеристическое уравнение (4). Оно имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} -7-\lambda & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Применив правило разложения определителя по строке и используя формулы сокращенного умножения, получим в итоге уравнение

$$(\lambda + 3)^4 = 0.$$

Это означает, что указанное в условии преобразование имеет единственное собственное значение $\lambda_{1,2,3,4} = -3$ кратности 4.

Осталось найти собственные векторы. Система (3) при $\lambda = -3$ будет такова:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или, в покомпонентной форме,} \quad \begin{cases} -\phi_1 + 2\phi_2 = 0, \\ -\phi_3 + 2\phi_4 = 0. \end{cases}$$

Приняв ϕ_2 и ϕ_3 за основные неизвестные, а ϕ_1 и ϕ_4 за свободные, получим два линейно независимых собственных вектора

$$\| f_{(1)} \| = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \| f_{(2)} \| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют базис *двумерного* собственного подпространства оператора \hat{A} , отвечающего собственному значению $\lambda = -3$ кратности 4.

В заключение заметим, что мы нашли собственные векторы в форме их координатных представлений. Сами собственные векторы (если учесть равенство (5)) суть матрицы 2-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Ради любопытства проверим, что эти матрицы удовлетворяют определению собственного вектора.

Действительно, верны равенства

$$\hat{A}f = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda f.$$

Левый конец этой цепочки равенств есть результат действия оператора на собственный вектор, а правый конец – умножение на этот вектор собственного значения.