Линейные зависимости в линейном пространстве

Определение Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^*. Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^*, действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$.
При этом элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x – *прообразом элемента* y.

Операторы принято подразделять на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subset \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$.

В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства
1°. $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2$ и
2°. $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x$.

Примеры

1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\|,$$

связывающее вектор-прообраз $x = \left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\|$ с вектором-образом $y = \left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\|$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция *дифференцирования*, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его *производную функцию*.

3°. В пространстве *непрерывных функций* $f(\tau)$ *линейным оператором является операция* умножения непрерывной функции на независимую переменную τ .

Задача 01 *Является ли линейным оператор $\hat{A}$, ставящий каждому элементу $x \in \Lambda$ в соответствие фиксированный элемент $a \in \Lambda$?*

Решение. Если элемент $a = o$, то $\hat{A}$ – линейный оператор. Действительно, если $\hat{A}$ линейный, то, с одной стороны,

$$\hat{A}(\lambda a + \mu a) = \lambda \hat{A} a + \mu \hat{A} a = \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu) a,$$

но, с другой,

$$\forall \lambda, \mu : \hat{A}(\lambda a + \mu a) = a \quad \Rightarrow \quad a = (\lambda + \mu) a \quad \Rightarrow \quad a = o.$$

\

Действия с линейными операторами

Определение

Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными* (что обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$), если

$$\forall x \in \Lambda : \quad \hat{A}x = \hat{B}x .$$

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A} + \hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма

Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.

Определение

Нулевым оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение

Оператором, противоположным оператору $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, ставящий каждому x элементу линейного пространства Λ в соответствие элемент $-(\hat{A}x)$.

Из решения задачи 01 следует, что нулевой оператор линейный. Также можно показать, что оператор противоположный любому линейному оператору также линейный.

Лемма

Для любых линейных операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются соотношения

$$\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{A};$$
$$(\hat{A}+\hat{B})+\hat{C}=\hat{A}+(\hat{B}+\hat{C});$$
$$\hat{A}+\hat{O}=\hat{A};\ \hat{A}+(-\hat{A})=\hat{O}.$$

Определение

Произведением числа λ на линейный оператор $\hat{A}$ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма

Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором, для которого выполняются соотношения

$$\alpha(\beta\hat{A})=(\alpha\beta)\hat{A};\quad 1\hat{A}=\hat{A};$$
$$(\alpha+\beta)\hat{A}=\alpha\hat{A}+\beta\hat{A};$$
$$\alpha(\hat{A}+\hat{B})=\alpha\hat{A}+\alpha\hat{B}.$$

Теорема

Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является линейным пространством.

Определение *Произведением* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} \ ; \quad \hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C};$$
$$(\hat{A}+\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}.$$

В общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть *нулевой* оператор.

Задача 04 *В линейном пространстве алгебраических многочленов* $P_n(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k$ *найти коммутатор для операторов*: $\hat{A}$, *ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и* $\hat{B}$ *– оператора умножения многочлена на независимую переменную.*

Решение. Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\right)=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau)=\tau\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau))=\tau\left(\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^k=\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k,$$

$$\hat{A}(\hat{B}P_n(\tau))=\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k,$$

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau)=\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=P_n(\tau).$$

Следовательно, данные линейные операторы *не коммутируют*.

В задаче 04 оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

Определение

Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть

$$\hat{E}x = x \quad \forall x \in \Lambda .$$

Имеют место соотношения: $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A} \quad \forall \hat{A}$, а также линейность и единственность $\hat{E}$.

Определение

Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* для линейного оператора $\hat{A}$ (который обозначается как $\hat{A}^{-1}$), если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Пример

В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha,\beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha)=0$; $k=0,1,2,\ldots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f=\dfrac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f=\int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma$ − оператор интегрирования с переменным верхним пределом являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f=\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma = f(\tau)=\hat{E}f \quad \text{и} \quad \hat{B}\hat{A}f=\int\limits_{\alpha}^{\tau}\frac{df}{d\sigma}d\sigma = f(\tau)-f(a)=f(\tau)=\hat{E}f .$$

Замечания.

1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{B}$ имеет место

$$(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o \quad \forall x \in \Lambda ,$$

и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{B}$.

2°. Обратный оператор, если существует, то только единственный.

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из справедливости условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Это имеет место, например, в пространстве многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$$

для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ ставит в соответствие многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$ являющийся *отображением* из Λ^n в Λ^m с базисом $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$.

Известно, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \ , \quad \text{то есть} \quad \| x \|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|.$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности $\hat{A}$ справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i .$$

Приняв во внимание возможность и единственность в пространстве Λ^m разложения вида $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_k \ \ \forall i = [1, n]$, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \right) f_k .$$

С другой стороны, если $\| y \|_f = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_m \end{matrix} \right\|$ – координатное представление y в Λ^m, то имеет место равенство $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k f_k$. Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \ ; k = [1, m] .$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению прообраза. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ в паре конкретных базисов полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki}.

Определение

Матрица размера $m \times n$, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A}g_i$:

$$\| \hat{A} \|_{fg} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисах

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n \quad \text{и} \quad \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \in \Lambda^m .$$

В матричной форме соотношения $\eta_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \ ; k = [1, m]$ имеют вид $\| y \|_f = \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g$, в чем легко убедиться, воспользовавшись их *двухиндексной* формой записи:

$$\eta_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \, \xi_{i1} \ ; \quad k = [1, m] .$$

Полученный результат формулируется как

Теорема

Между множеством всех линейных операторов вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ и множеством всех матриц размера $m \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Задача 05. В линейном пространстве алгебраических многочленов степени не выше, чем n, вида $P_m(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{m}\xi_k\tau^k$ с базисом $\{1,\tau,\tau^2,\ldots,\tau^n\}$ найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}=\dfrac{d}{d\tau}$ по переменной τ.

Решение: 1) Размерность линейного пространства алгебраических многочленов степени не выше, чем n равна $n+1$. А действующий в этом пространстве оператор дифференцирования является линейным преобразованием.

2) Образом базисного элемента τ^k при действии оператора дифференцирования для $1\le k\le n$ будет функция $k\tau^{k-1}$, а для $k=0$ - многочлен, равный 0 при $\forall\tau$.

3) По определению столбцами матрицы оператора являются *координатные столбцы* образов базисных элементов. А для образа $k+1$-го базисного элемента *координатное разложение* имеет вид

$$k\tau^{k-1}=0\cdot 1+0\cdot\tau+\ldots+k\cdot\tau^{k-1}+0\cdot\tau^k+\ldots+0\cdot\tau^n .$$

Поэтому искомая матрица будет

$$\left\|\hat{D}\right\|=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Задача 06. В линейном пространстве квадратных матриц второго порядка $X = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{Vmatrix}$ задано преобразование $\hat{M}$ формулой $Y = \hat{M}\, X \equiv A\, X$, где $A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}$, а матрица Y есть образ матрицы X при данном преобразовании.

Требуется найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\{ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \}$, для которого

$$e_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\ e_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\ e_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\ e_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение: 1) Имеем: размерность линейного пространства квадратных матриц второго порядка равна 4, а линейность данного преобразования следует из свойства дистрибутивности умножения матриц:

$$\|A\|\left(\lambda_1\|X\|_1+\lambda_2\|X\|_2\right)=\lambda_1\|A\|\|X\|_1+\lambda_2\|A\|\|X\|_2=\lambda_1\|Y\|_1+\lambda_2\|Y\|_2$$

2) Координатное представление (координатный столбец) элемента в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка вида $\begin{Vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{Vmatrix}$ есть 4-х компонентный столбец $\begin{Vmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{12}\\ \xi_{21}\\ \xi_{22}\end{Vmatrix}$. Координатное представление линейного преобразования в этом пространстве будет квадратной матрицей 4-го порядка, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.

3) Найдем эти представления. Имеем

$$\hat{M}e_1 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_1 \| = \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_2 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_2 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_3 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_3 \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_4 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_4 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{Vmatrix}$$

4) Из полученных координатных представлений образов базисных элементов составляем искомую матрицу преобразования $\hat{M}$

$$\left\| \hat{M} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -7 \end{matrix} \right\|$$

Действия с линейными операторами в координатной (матричной) форме

Будем рассматривать далее операторы вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^n$, то есть линейные *преобразования*, действующие в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, матрица которых квадратная, порядка n. Введенные ранее операции с матрицами позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

$1°$. Сравнение операторов: $\hat{A} = \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \| \hat{A} \|_g = \| \hat{B} \|_g$.

$2°$. Сложение операторов: $\| \hat{A} + \hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g + \| \hat{B} \|_g$.

$3°$. Умножение оператора на число: $\| \lambda \hat{A} \|_g = \lambda \| \hat{A} \|_g$.

$4°$. Произведение операторов: $\| \hat{A}\hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g \| \hat{B} \|_g$.

$5°$. Обращение операторов: $\| \hat{A}^{-1} \|_g = \| \hat{A} \|_g^{-1}$.

Следствие.

Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\Lambda^n \to \Lambda^m$ равна $m \times n$.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\|\hat{A}\|_{fg}$ – матрица линейного отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ при замене базисов. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\|G\|$, а в Λ^m – два базиса $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ с матрицей перехода $\|F\|$. Найдем соотношение, связывающее $\|\hat{A}\|_{fg}$ и $\|\hat{A}\|_{f'g'}$.

В этом случае справедлива

Теорема **Матрица линейного оператора $\|\hat{A}\|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\|\hat{A}\|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ соотношением**

$$\|\hat{A}\|_{f'g'} = \|F\|^{-1} \|\hat{A}\|_{fg} \|G\|.$$

Следствия

Матрица *линейного преобразования* при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ в Λ^n изменяется по правилу

$$\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| .$$

Определитель матрицы линейного преобразования *не зависит* от выбора базиса в Λ^n.

Действительно из $\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|)$, силу

$$\det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = (\det \| S \|^{-1})(\det \| \hat{A} \|_g)(\det \| S \|) \quad \text{и} \quad \det \| S \|^{-1} = \frac{1}{\det \| S \|}, \text{ где } \det \| S \| \neq 0 ,$$

получаем, что $\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det \| \hat{A} \|_g$.

Область значений и ядро линейного оператора

Рассматривая линейный оператор, действующий в линейном пространстве, как некоторое обобщение понятия функции, естественно поставить вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора* $\hat{A}$ будем понимать множество образов *всех* элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ.

Ответ на вопрос: "*Что представляет собой область значений линейного оператора*?" дает

Теорема

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ. Тогда

1°. Множество элементов $\hat{A}x \ \forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ.

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, то размерность этого подпространства равна $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_g$.

Следствие **Размерность области значений линейного оператора $\hat{A}$, действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.**

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ, называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker\hat{A}$.

4
Определение *Ядро* линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x \in \Lambda$, таких, что $\hat{A}x = o$.

Теорема **Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\operatorname{rg}\hat{A} = r$, то $\ker\hat{A}$ есть подпространство и $\dim(\ker\hat{A}) = n - r$.**

Задача 07. Пусть в базисах $\left\{ e_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \subset \Lambda^4$ и $\left\{ g_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad g_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad g_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \subset \Lambda^3$ матрица линейного отображения $\Lambda^4 \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^3$ имеет вид $\| \hat{A} \|_{ge} = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Требуется найти *базисы* как в *ядре*, так и в *области значений* данного линейного отображения $\hat{A}$.

Решение: 1) По определению ядром линейного оператора $\hat{A}$ является совокупность всех элементов $x \in \Lambda$ таких, что $\hat{A}x = o$. Причем в конечномерном пространстве это уравнение может быть записано в матричном виде $\|\hat{A}\|\|x\| = \|o\|$, который для решаемой задачи будет

$$\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 \qquad + \xi_4 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0, \\ \quad -2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение последней однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2$$

и является *описанием ядра,* отображения, заданного в условии задачи .

Как известно, это ядро есть линейное пространство. Базисом в ядре в этом случае может служить фундаментальная система решений, например, пара элементов

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\}.$$

2) Множество значений линейного отображения согласно определению имеет вид $y = \hat{A}x \quad \forall x \in \Lambda$. В конечномерном случае это равенство принимает вид $\| y \| = \| \hat{A} \| \| x \|$, что для решаемой задачи приводит к системе линейных уравнений

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 \qquad + \xi_4 = \eta_1, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \eta_2, \\ \quad -2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = \eta_3. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Здесь $\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\|$ - координатное представление произвольного элемента $y \in \Lambda^3$.

Теперь заметим, что множеством значений отображения $\hat{A}$ является совокупность всех тех $y \in \Lambda^3$, для которых система (I) совместна. Эту совокупность найдем, использовав теорему Кронекера-Капелли.

Предварительно приведем последовательными *элементарными* преобразованиями расширенную матрицу системы (I) к упрощенному виду. Для этого достаточно из третьей строки вычесть сумму первых двух и записать результат на место третьей. Получим

$$\left\| \begin{array}{rrrrcc} 1 & -3 & 0 & 1 & | & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & | & \eta_2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & | & \eta_3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{rrrrcr} 1 & -3 & 0 & 1 & | & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & | & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{array} \right\|$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют рангов матриц, то очевидно, что ранг основной матрицы системы (I) будет равен рангу расширенной, если $-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 0$. А это по теореме Кронекера_Капелли означает совместность системы (I).

Последнее равенство задает искомое множество значений линейного оператора $\hat{A}$. Его можно рассматривать как однородную систему, состоящую из одного уравнения с тремя неизвестными, общее решение которой имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array} \right\| = \mu_1 \left\| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\| + \mu_2 \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \forall \mu_1, \mu_2 \; .$$

Ее фундаментальную систему решений (например, столбцы $\left\| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\|$) можно принять за базис во множестве значений линейного отображения $\hat{A}$.

При решении задач следует учитывать, что в конечномерном случае при выбранном базисе матрица линейного оператора существует и единственна. Поэтом для ее построения можно использовать *любой* метод, вплоть до подбора.

Например, пусть в Λ^4 линейное преобразование $\hat{A}$ переводит четыре линейно независимых элемента $\{\, x_1, x_2, x_3, x_4 \,\}$ соответственно в четыре элемента $\{\, y_1, y_2, y_3, y_4 \,\}$.

И пусть столбцами матрицы $\| X \|$ являются координатные представления элементов $\{\, x_1, x_2, x_3, x_4 \,\}$ в некотором (например, стандартном) базисе, а столбцами матрицы $\| Y \|$ − координатные представления элементов $\{\, y_1, y_2, y_3, y_4 \,\}$.

Тогда, исходя из определения произведения матриц, можно показать, что в этом базисе матрица преобразования $\| \hat{A} \|$ должна удовлетворять равенствам

$$\| Y \| = \| \hat{A} \| \| X \| \quad \text{или} \quad \| \hat{A} \| = \| Y \| \| X \|^{-1} .$$

Как было показано в теме 1, произведение $\| Y \| \| X \|^{-1}$ удобно вычислять по следующей схеме:

1) Составляем объединенную матрицу $\| Y | X \|$.
2) Правую подматрицу некоторым набором элементарных преобразований приводим к единичной.
3) Левую подматрицу изменяем тем же набором элементарных преобразований.

Тогда на месте левой подматрицы оказывается искомое произведение $\| \hat{A} \| = \| Y \| \| X \|^{-1}$.

Виды линейных отображений

Как уже было отмечено, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *биективных*, *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

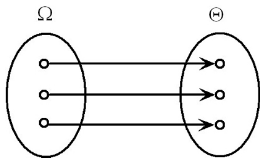
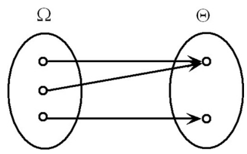
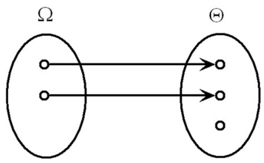
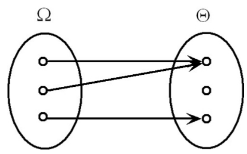
Определение Отображение $y = \hat{A}x\,, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает

$$x_1 = x_2\,, \quad x_1, x_2 \in \Omega\,.$$

Отображение $y = \hat{A}x\,, \quad x \in \Omega, \; y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюрьективное		
Несюрьективное		

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega,\ y \in \Theta$ может не совпадать с Θ.

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω , но, вообще говоря, он не единственен

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность – условия $\ker\hat{A} = \{o\}$. Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема **Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.**

Иными словами, для $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ инъективность равносильна выполнению равенств $\operatorname{rg}\| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^n) = n$, а сюръективность $\operatorname{rg}\| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^m) = m$.

Задача 08. Линейное отображение $\hat{A}:\ \Lambda^3 \to \Lambda^3$ в некотором базисе задано матрицей $\left\| \hat{A} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \right\|$. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.

Решение. 1°. Пусть $\| x \| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\| y \| = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$ – координатные представления соответственно прообраза и образа оператора $y = \hat{A}x$. Тогда ядро – множество элементов x, таких, что $\hat{A}x = o$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений

$$\| \hat{A} \| \| x \| = \| o \| \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения $\hat{A}$ есть линейная оболочка элемента $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение *неинъективное*.

К этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что

$$\operatorname{rg} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 2 < 3$$ – числа столбцов матрицы отображения.

2°. Область значений линейного отображения $\hat{A}$ состоит из элементов $y \in \Theta$, таких, что $y = \hat{A}x \ \forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y ко множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix},$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы *Кронекера–Капелли*, сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы. Затем из условия

$$\operatorname{rg}\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 2 & 3 & 4 & \eta_2 \\ 3 & 5 & 7 & \eta_3 \end{array}\right\Vert = \operatorname{rg}\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2\eta_1 - \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{array}\right\Vert = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения $\hat{A}$ состоит из элементов вида

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y \in \Theta = \Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega = \Lambda^3$, то данное отображение не является и *сюръективным*.

Линейные формы

В заключение рассмотрим простой, но важный для практики частный случай линейного отображения вида $\hat{A}:\{\Lambda \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^1\}$. Здесь результат действия $\hat{A}$ на элемент $x \in \Lambda$ естественно обозначить функционально, как $f(x)$, т.е. $\hat{A}x = f(x)$.

Такого вида зависимость называют *линейной функцией*, *линейным функционалом* или *линейной формой*, поскольку при этом множество значений *числовое*.

Важно помнить, что в конечномерном случае, т.е. при $\Lambda = \Lambda^n$, матрица преобразования $\hat{A}$ имеет, в силу формулы (1), размер $1 \times n$, т.е. является $n-$компонентной строкой. Это вытекает из нашего (сделанного ранее) выбора $n-$компонентного столбца как координатного представления элемента пространства .

Формула для нахождения значений линейной формы $f(x) \in \mathbf{R}$ $x \in \Lambda^n$ в Λ^n является обычной линейной функцией от n числовых переменных. Действительно, пусть в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \in \Lambda^n$ координатный столбец $\| x \|_g = \| \xi_1 \; \xi_2 \; \ldots \; \xi_n \|^{\mathrm{T}}$, а значения формы на базисных элементах $\phi_k = f(g_k)$ $k = [1, n]$, что дает $\| \hat{A} \|_g = \| f \|_g = \| \phi_1 \; \phi_2 \; \ldots \; \phi_n \|$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \xi_k = \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| x \|_g .$$

Задача 9: Пусть Λ^n линейное пространство алгебраических многочленов $x = P_4(\tau) = \xi_1 + \xi_2 \tau + \xi_3 \tau^2 + \xi_4 \tau^3$ степени не выше, чем 3, с базисом вида $\{ g_1(\tau) = 1, g_2(\tau) = \tau, g_3(\tau) = \tau^2, g_4(\tau) = \tau^3 \}$, а линейная форма есть определенный интеграл от многочлена в пределах от 0 до 1. Найти координатное представление этой формы в данном базисе.

Решение: в нашем случае $f(x)=\int\limits_0^1 P_4(\tau)\,d\tau$, а искомое координатное представление линейного оператора $\hat{A}:\{\,\Lambda^4\to\Lambda^1\,\}$ есть четырех компонентная строка вида

$$\|\,f\,\|_g=\|\;f(P_4(g_1(\tau)))\quad f(P_4(g_2(\tau)))\quad f(P_4(g_3(\tau)))\quad f(P_4(g_4(\tau)))\;\|.$$

Конкретно

$$f(P_4(g_1(\tau)))=\int\limits_0^1 1\cdot d\tau=1\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau)))=\int\limits_0^1 \tau\,d\tau=\frac{1}{2}\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau)))=\int\limits_0^1 \tau^2 d\tau=\frac{1}{3}\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau)))=\int\limits_0^1 \tau^3 d\tau=\frac{1}{4}\,.$$

Откуда следует ответ задачи: $\|\,f\,\|_g=\left\|\;1\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}\;\right\|.$