Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Наша основная задача: найти формулу, описывающую *все* решения систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

которая в *неразвернутой* форме записывается как

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \ , \quad i = [1, m] \ ,$$ или же в *матричной* форме $$\|A\| \, \| x \| = \| b \|,$$

где матрица $\|A\|$ (размера $m \times n$) имеет *произвольные* численные компоненты α_{ij}, а столбцы $\| x \|$ и $\| b \|$ - соответственно компоненты $\xi_j \quad j = [1, n]$ и $\beta_i \quad i = [1, m]$.

Напомним основные определения, необходимые при решении систем линейных уравнений.

Определение Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (1.1), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства. Частное решение системы линейных уравнений будем записывать в виде столбца $\left\| x^0 \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \ldots \\ \xi_n^0 \end{matrix} \right\|$.

Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (1.1) назовем *общим решением* системы (1.1).

Если система (1.1) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной* системой уравнений.

Определение Система (1.1) называется *однородной*, если $\beta_i = 0 \ \forall i = [1, m]$, в противном случае – *неоднородной* системой уравнений.

Однородная система $\|A\| \| x \| = \| o \|$ всегда совместна, поскольку имеет очевидное нулевое (тривиальное) решение.

Определение Матрица $\|A\|$ называется *основной* матрицей системы (1.1), а матрица $\left\| A \mid b \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right\|$ – *расширенной* матрицей этой системы.

Приведем теперь формулировки основных теоретических утверждений, используемых при решении систем линейных уравнений.

Нам потребуются:

Теорема (Кронекера–Капелли). **Для того чтобы система (1.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.**

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_j$; $i = [1,n]$ имеет место

Теорема (правило Крамера). **Для того чтобы система линейных уравнений (1.1) при $n = m$ *имела единственное* решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \det\|A\| \neq 0$, и в этом случае решение данной системы будет иметь вид**

$$\xi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ ; \ j = 1,2,\ldots,n \ ,$$

где Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|A\|$ заменой ее j-го столбца на столбец свободных членов $\|b\|$:

$$\Delta_j = \det\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \\ \uparrow \\ j\text{-й столбец} \end{array} .$$

Ранг матрицы

Пусть число k такое, что $1 \le k \le \min\{m, n\}$. Выберем некоторым способом в $\|A\|$ k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную матрицу минора порядка k. Отметим: выбор столбцов и выбор строк выполняются *независимо* друг от друга.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k .

Определение .	*Максимальный* из порядков, *отличных от нуля* миноров матрицы $\|A\|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rg}\|A\|$ (или $\mathrm{rank}\|A\|$).
	Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.
	Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Линейная зависимость столбцов

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида

$$\|a_1\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\| ; \ \|a_2\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\| ; \ldots ; \ \|a_n\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \ldots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\| \ \text{ и столбцы } \|b\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{matrix} \right\| ; \ \|o\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_n\|$, если $\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что $\|b\| = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \|a_j\|$.

Определение Столбцы $\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_n\|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|a_j\| = \|o\|, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| > 0 \right).$$

Определение линейной независимости также дается аналогично определению для векторов.

Теоремы, использующие понятие ранга матрицы

Предварительно напомним, что справедливы утверждения:

Лемма

Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.

Теорема (о базисном миноре).

Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.

Следствие

Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.

Теорема (о ранге матрицы).

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.

Формула решения системы m линейных уравнений с n неизвестными

При построении общего решения системы (1.1) воспользуемся следующими легко проверяеыми утверждениями.

Лемма

1. **Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (1.1) также является ее частным решением.**
2. **Сумма некоторого частного решения однородной системы (1.1) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (1.1)**
3. **Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (1.1) является частным решением однородной системы (1.1).**

Откуда следует, что справедлива следующая, важная

Теорема А **Общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,**

ОБЩЕЕ решение НЕоднородной СЛУ	=	*ОБЩЕЕ решение однородной СЛУ*	+	*Частное решение НЕоднородной СЛУ*

Следует отметить, что в этой теореме частное решение неоднородной системы линейных уравнений может быть *любым*.

Вначале рассмотрим вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

Заметим, что, поскольку каждое частное решение системы линейных уравнений (1.1) представимо в виде n-компонентного столбца, то можно использовать понятия линейно зависимых и линейно независимых частных решений этой системы.

Основой для построения формулы общего решения однородной системы служит

Теорема В **Максимальное число линейно независимых частных решений однородной системы (1.1) равно $n - \mathrm{rg}\|A\|$.**

Определение *Фундаментальным набором решений* для системы линейных уравнений (1.1) называется совокупность любых $n - \mathrm{rg}\|A\|$ *линейно независимых*, частных решений однородной системы (1.1), где n – число неизвестных в системе (1.1), а $\|A\|$ – ее основная матрица.

Матрица, столбцами (или строками) которой служат столбцы фундаментальных решений, называется *фундаментальной*.

В силу первого утверждения леммы *любая* линейная комбинация фундаментальных решений есть частное решение однородной системы (1.1).

С другой стороны, также справедлива

Теорема C **_Каждое_ частное решение однородной системы (1.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, составляющих фундаментальный набор решений.**

Исходя из двух последних утверждений и теоремы A, заключаем, что справедлива

Теорема D **_Общее_ решение неоднородной системы (1.1) представимо как сумма произвольной линейной комбинации фундаментальных частных решений однородной и некоторого частного решения неоднородной системы (1.1).**

Детально проиллюстрируем применение изложенной теории, решив

Пример 1.01. *Найти общее решение системы линейных уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 9x_3 & - & 6x_4 & = & -12\ , \\ x_1 & & & + & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -4\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right. \qquad \text{(A)}$$

Решение: 1. Заменим исходную систему на равносильную ей, причем такую, что нахождение нужных нам частных решений, оказывается не сложной задачей.

Для этого вычтем первое уравнение последовательно из второго и третьего, не меняя при этом первого и четвертого уравнений. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ , \\ & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right.$$

Откуда получаем, исходная система будет равносильна системе вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right. \qquad \text{(B)}$$

2. Если преобразовать последнюю систему к виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -8 + 3x_3 + 6x_4 \,, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = -4 + 6x_3 \,, \end{cases} \tag{C}$$

то, исходя из теоремы Крамера, можно утверждать, что неизвестные x_1 и x_2 имеют однозначно определяемые значения при любых, заранее заданных, значениях неизвестных x_3 и x_4.

3. Воспользуемся этим свойством системы (С) для нахождения нужных частных решений.

Во-первых, нам нужно какое-нибудь частное решение системы (A). Найдем его, положив, например, в системе (C) $x_3 = x_4 = 0$. Это даст $x_1 = x_2 = -4$.

4. Во-вторых, нам нужны фундаментальные решения однородной системы (A).

По определению, у однородной системы (A) правые части ее уравнений нулевые. Поэтому, выполнив для однородной системы те же преобразования, что и для неоднородной, мы получим систему вида

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & = & 3x_3 & + & 6x_4 & , \\ & & x_2 & = & 6x_3 & & & . \end{array} \right. \qquad \text{(D)}$$

Для фундаментальности частных решений требуется, чтобы

- во-первых, они были линейно независимыми и,
- во-вторых, их число равнялось $n - \operatorname{rg}\| A \|$.

В нашем случае $n = 4$, а $\operatorname{rg}\| A \| = 2$.

Действительно, выполненные нами преобразования уравнений системы (A), *рангов матриц не меняют*, и, значит, ранги основных матриц систем (A) и (B) одинаковые. Тогда из формулы $n - \operatorname{rg}\| A \|$ следует, что нам нужно найти лишь *два* линейно независимых частных решения системы (D).

Поскольку неизвестные x_3 и x_4 в системе (D) произвольные, то (*докажите это самостоятельно*) линейную независимость пары частных решений этой системы гарантирует использование $x_3 = 1, x_4 = 0$ для первого решения и $x_3 = 0, x_4 = 1$ - для второго.

Следовательно, первое фундаментальное решение мы находим, решая систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ \qquad x_2 = 6. \end{cases}$ Это дает $x_1 = -3, x_2 = 6$. Аналогично, второе фундаментальное решение определяется из системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ \qquad x_2 = 0. \end{cases}$. То есть, $x_1 = 6, x_2 = 0$.

5. Запишем найденные решения в матричном виде: набор фундаментальных решений будет состоять из $\left\|\begin{matrix}-3\\6\\1\\0\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix}6\\0\\0\\1\end{matrix}\right\|$, а частное решение неоднородной системы $\left\|\begin{matrix}-4\\-4\\0\\0\end{matrix}\right\|$.

В этом случае общее решение однородной системы описывается формулой $\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}\right\| = \lambda_1\left\|\begin{matrix}-3\\6\\1\\0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}6\\0\\0\\1\end{matrix}\right\| \quad \forall\lambda_1,\lambda_2,$ а общее решение неоднородной

$$\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}\right\| = \lambda_1\left\|\begin{matrix}-3\\6\\1\\0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}6\\0\\0\\1\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}-4\\-4\\0\\0\end{matrix}\right\| \quad \forall\lambda_1,\lambda_2.$$

Заметим, что в последней формуле можно исключить λ_1 и λ_2. Тогда получится более компактная, но менее наглядная форма записи общего решения:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 6x_4 - 4, \\ x_2 = \quad 6x_3 \qquad\quad - 4. \end{cases}$$

Иное, полезное для приложений, условие совместности системы линейных уравнений, дает

Теорема (Фредгольма).

Для того чтобы система (1.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы *каждое* решение $\| y \| = \| \eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_m \|^{\mathrm{T}}$ *сопряженной* системы

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \ldots + \alpha_{m1}\eta_m = 0, \\ \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \ldots + \alpha_{m2}\eta_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + \alpha_{2n}\eta_2 + \ldots + \alpha_{mn}\eta_m = 0 \end{cases}$$

(или в матричном виде $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$) удовлетворяло условию $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \eta_i = 0$ (или в матричном виде $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0$).

Элементарные преобразования. Метод Гаусса

Практическое применение теории решения систем линейных уравнений затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (1.1), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в преобразовании расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под “наиболее простым” видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным.

Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n \; (n > m)$, имеющей верхнюю треугольную форму

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);
- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ранг ее матрицы) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида. Например:

- перестановка *столбцов* с номерами i и j матрицы $\|A\|$ размера $m \times n$ осуществляется путем ее умножения *справа* на матрицу $\|S\|_1$ размера $n \times n$, которая в свою очередь получается из единичной матрицы n-го порядка $\|E\|$ путем перестановки в последней i-го и j-го столбцов;
- умножение i-й *строки* матрицы $\|A\|$ на некоторое число $\lambda \neq 0$ осуществляется путем умножения $\|A\|$ *слева* на матрицу $\|S\|_2$, которая получается из единичной размера $m \times m$ матрицы $\|E\|$ путем замены в последней i-го диагонального элемента (равного единице) на λ;
- сложение *строк* с номерами i и j матрицы $\|A\|$ осуществляется путем ее умножения *слева* на матрицу $\|S\|_3$ размера $m \times n$, которая получается из единичной матрицы порядка m $\|E\|$ путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в i-й строке и j-м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте i-й строки исходной матрицы $\|A\|$).

Можно показать, что если матрица $\|S\|$ квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы $\|S\|$ на матрицу $\|A\|$, то справедливо равенство

$$\operatorname{rg}(\|S\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|A\|.$$

Поскольку $\det\|S\|_1 = -1$, $\det\|S\|_2 = \lambda \neq 0$ и $\det\|S\|_3 = 1$, то ранг $\|A\|$ при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

Проверьте самостоятельно, что будут также справедливы следующие теоремы

Теорема 6.8.1. **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся *произведением* матриц данных элементарных преобразований.**

Теорема 6.8.2. **Если умножение матрицы $\|A\|$ слева на квадратную матрицу $\|S\|$ реализует некоторое преобразование над строками $\|A\|$, то умножение $\|A\|$ справа на $\|S\|^{\mathrm{T}}$ реализует то же самое преобразование матрицы $\|A\|$, но выполненное над ее столбцами.**

Отмеченные свойства элементарных преобразований позволяют в ряде случаев упрощать вычислительные процедуры с матричными выражениями. Пусть, например, $\|S\|^*$ есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу $\|A\|$ в единичную. Тогда преобразование с матрицей $\|S\|^*$ переведет единичную матрицу $\|E\|$ в матрицу $\|A\|^{-1}$, поскольку в силу $\|E\|=\|S\|^*\|A\|$ и невырожденности $\|A\|$ справедливы равенства

$$\|E\|\|A\|^{-1}=\|S\|^*\|A\|\|A\|^{-1} \quad \text{или} \quad \|A\|^{-1}=\|S\|^*\|E\|.$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц $\|A\|^{-1}\|B\|$ может быть сведено к последовательности элементарных преобразований матрицы $\|A\,|\,B\|$ (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы $\|B\|$ к матрице $\|A\|$), приводящих подматрицу $\|A\|$ к единичной. В результате искомое произведение оказывается на месте подматрицы $\|B\|$.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений, основанный на элементарных преобразованиях расширенной матрицы, является универсальной процедурой, не требующей использования каких-либо специфических свойств этой матрицы. Проиллюстрируем данное утверждение следующим примером.

Пример 1.02. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7, \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12. \end{cases}$$

Решение. 1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right\|.$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого

а) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на (-3), и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами (-5) и 1 соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для верхнего треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right\|;$$

б) выполняем теперь операцию зануления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую – разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|;$$

в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.

3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Потому заключаем, что

1) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме Кронекера–Капелли);
2) однородная система уравнений будет иметь $n - \mathrm{rg}\|A\| = 5 - 2 = 3$ линейно независимых решения.

4°.. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое – за свободные:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \qquad \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5. \end{cases} \tag{1.2}$$

Второе строку для удобства вычислений умножим на (-1), а третью и четвертую строки отбросим, так как уравнения, им соответствующие, удовлетворяются тождественно.

Положив в системе (1.2) свободные неизвестные равными нулю, находим частное решение неоднородной системы $\left\|\begin{matrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|$. Значения основных неизвестных определяются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7, \\ \xi_2 = 23. \end{cases}$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 0 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим фундаментальный набор решений по стандартной схеме. Первое линейно независимое решение $\left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|$ находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1, \\ \xi_2 = -2. \end{cases}$$

Аналогично получаются $\left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|$ – второе и третье решения.

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_3 \left\|\begin{matrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 .$$

Замечание.: Поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.

Как будет видно из дальнейшего, большое число задач, решение которых оказывается необходимым, являются (или сводятся) к задачам решения систем линейных уравнений. Одной из таких задач является задача построения однородной системы линейных уравнений, имеющей общее решение заданного вида. По сути, речь идет о задаче 'обратной' к задаче решения системы линейных уравнений. Рассмотрим

Пример 1.03. *Определить возможный вид однородной системы линейных уравнений, имеющей частные решения вида*

$$\left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|.$$

Решение: 1) При любых постоянных λ_1, λ_2 и λ_3 решением искомой системы будет являться линейная комбинация вида

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\| + \lambda_3 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|. \qquad \text{(A)}$$

Предположим, что некоторое уравнение искомой системы имеет вид

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \ ,$$

или в матричной форме $\left\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$ (B)

2) Выясним, при каких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ это равенство окажется верным при любых λ_1, λ_2 и λ_3. Для этого подставим (A) в (B) и перегруппируем слагаемые в левой части:

$$\left\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \right\| \left(\lambda_1 \left\| \begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) = 0$$

или

$$\lambda_1 \left\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = 0$$

3) Это равенство окажется очевидно верным при любых λ_1, λ_2 и λ_3, если числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ являются решением следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha_1 - 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \qquad 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0. \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

4) Решаем эту систему методом Гаусса, преобразуем ее основную матрицу:

$$\begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \text{(D)}$$

Примем α_1 и α_4 за основные неизвестные, а α_2 и α_3 - за свободные. Получим упрощенную систему: $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_4 = -5\alpha_2 + 3\alpha_3, \\ \qquad \alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3. \end{cases}$

5) Ранг матрицы (D) равен 2, поэтому система (C) имеет $4-2=2$ фундаментальных решения вида:

$$\left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\|;\quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right\|$$

Проверьте это самостоятельно.

6) Откуда следует, что искомая система будет иметь максимум два независимых уравнения, например, вида $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Это - ответ задачи.

Для полноты картины, отметим, что существует альтернативный метод решения рассмотренной задачи. Приведем его описание.

Пример 1.04. *Определить возможный вид однородной системы линейных уравнений, имеющей частные решения вида*

$$\left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

Решение: 1) Опять-таки, при любых постоянных λ_1, λ_2 и λ_3 решением искомой системы будет являться линейная комбинация вида

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\| + \lambda_3 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| . \qquad \text{(A)}$$

2) По правилам действия с матрицами из равенства (А) следует, что числа λ_1, λ_2 и λ_3 должны являться решением неоднородной системы линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x_1, \\ -5\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x_2, \\ 3\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & x_3, \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_4. \end{array}\right. \qquad \text{(E)}$$

3) Система (E) должна быть верной при любых λ_1, λ_2 и λ_3, а, значит, у нее правые части должны быть такие, что эта система имеет решение.

Теорема Кронекера-Капелли утверждает, что для совместности неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы равнялся рангу расширенной.

Найдем эти ранги для системы (E), используя метод Гаусса. Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrrcc} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ -5 & 2 & -1 & | & x_2 \\ 3 & -1 & 0 & | & x_3 \\ 2 & -1 & 1 & | & x_4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{rrrcr} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 2 & -6 & | & -5x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2x_1+x_4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{rrrcr} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1+x_2+2x_3 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1+x_3-x_4 \end{array} \right\|$$

4) Ранг основной матрицы равен 2. Ранг расширенной матрицы при произвольных значениях x_1, x_2, x_3 и x_4 вполне может быть больше, чем 2. Однако, если потребовать, чтобы эти значения удовлетворяли однородной системе уравнений,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad \text{(F)}$$

то ранги совпадут. Значит, система (F) ответ задачи.

5) Наконец заметим, что, если второе уравнение системы (F) умножить на -2, затем сложить результат с первым уравнением и заменить этой суммой первое уравнение, то мы получим систему, совпадающую с ответом в первом методе.