

Несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали два типа интегралов: неопределенные и определенные. Рассмотрим теперь еще один класс интегралов, называемых *несобственными*.

В приложениях достаточно часто возникает ситуация, когда промежуток интегрирования $[a, b]$ *неограничен*, либо, на ограниченном промежутке *неограниченной* является подынтегральная функция $f(x)$. И при этом существует определенный интеграл $\int_a^\beta f(x) dx$ при *любых* фиксированных a и β таких, что $a < \beta < b$.

Пусть либо $b = +\infty$, либо $b < +\infty$, но $\lim_{x \rightarrow b} = \infty$. Тогда можно дать

**Определение
6.1**

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется предел вида

$$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx ,$$

для которого (чтобы избежать совпадения со случаем определенного интеграла) мы будем использовать обозначение

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx ,$$

Важно: предел в определении 6.1 — *односторонний*.

Определение
6.2

Аналогично может быть определен несобственный интеграл для *нижнего* предела интегрирования:

$$\int_{a \leftarrow}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^b f(x) dx ,$$

Если предел, указанный в определении 6.1 *существует* и *конечен*, то этот несобственный интеграл принято называть *сходящимся*, иначе, говорят о *не сходящимся* (или *расходящимся*) несобственном интеграле.

**Определение
6.3**

Точку « $\rightarrow b$ » (или, соответственно, « $a \leftarrow$ ») называют *особой точкой* несобственного интеграла.

Особых точек у несобственного интеграла может быть несколько. Такой интеграл считается сходящимся, если он сходится *в каждой* из всех особых точек.

Например, интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x-2} dx$ имеет две особые точки: $x = 2 \leftarrow$ и $x \rightarrow +\infty$. Часто при этом просто говорят, что этот интеграл имеет особые точки «2» и « $+\infty$ ».

Однако, в некоторых случаях следует выражаться точнее.

Скажем, интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ также имеет *две* особые точки: $x = 0 \leftarrow$ и $x \rightarrow 0$, и их, понятно, не стоит обозначать одинаково, как «0».

Другим примером может служить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x-1} dx$, у которого подынтегральная функция не определена в *конечной* точке $x_0 = 1$, но является *ограниченной* в правой полуокрестности этой точки. Поэтому точка $x_0 = 1$ в силу определения 6.3 не является особой.

Для подобных точек можно использовать термин «точка, подозрительная на особую».

При вычислении значений несобственных интегралов можно использовать аналоги формул *интегрирования по частям* или *замены переменной интегрирования*.

Скажем, при замене $x = u^2$ и $dx = 2u du$ для интеграла

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du.$$

Далее, очевидно, по частям

$$J = 2ue^{-u} \Big|_0^{+\infty} - \left(-2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right) = 2ue^{-u} \Big|_0^{+\infty} - 2e^{-u} \Big|_0^{+\infty} = 2.$$

Рассмотрим теперь более содержательные примеры.

Пример 6.1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Решение. Имеем, согласно определению 6.1,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^{\beta} \right) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \beta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Значит, данный несобственный интеграл сходится.

Пример 6.2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{0\leftarrow}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Решение. Используя опять-таки определение 6.1, получим

$$\begin{aligned} \int_{0\leftarrow}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(3\sqrt[3]{x} \Big|_{\alpha}^1 \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (3 - 3\sqrt[3]{\alpha}) = 3. \end{aligned}$$

И этот несобственный интеграл также сходится.

Заметьте, что в приведенных примерах несобственные интегралы были двух разных видов: «несобственные интегралы на неограниченном промежутке интегрирования» (как в примере 6.1) и «несобственные интегралы от неограниченных функций», как в примере 6.2.

Пример 6.3. Выяснить, при каких значениях параметра p несобственный сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. При $p \neq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{\beta} \right) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

Если же $p = 1$, то интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln \beta - \ln 1) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln \beta = +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, исходный несобственный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Пример 6.4. Выяснить, при каких значениях параметра p сходится

несобственный интеграл $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^p}$

Решение. По определению 6.1 при $p \neq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\alpha}^1 \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{\alpha^{1-p}}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{если } p < 1, \\ \infty, & \text{если } p > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

Если же $p = 1$, то интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln |x| \Big|_{\alpha}^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \alpha) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (-\ln \alpha) = +\infty. \end{aligned}$$

В итоге исходный интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Продemonстрируем различие между определенным и несобственным интегралом на примере решения геометрической и физической задач:

Пример 6.5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = xe^{-x}$:

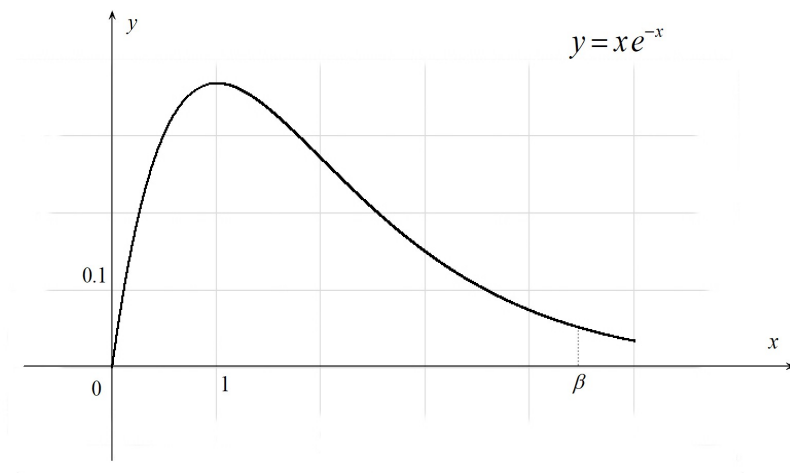


Рис. 1. Площадь фигуры, ограниченной графиком $y = xe^{-x}$.

- а) при $0 \leq x \leq 3$,
- б) при $0 \leq x < +\infty$.

Решение. а) Функция $y = xe^{-x}$ имеет неотрицательные значения на рассматриваемых промежутках (см. рис. 1,) поэтому площадь под графиком для $0 \leq x \leq \beta$ равна *определенному интегралу*

$$\int_0^{\beta} xe^{-x} dx .$$

Заметим, что $e^{-x} = (-e^{-x})'$. Тогда, воспользовавшись интегрированием по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} xe^{-x} dx &= x(-e^{-x}) \Big|_0^{\beta} - \int_0^{\beta} (-e^{-x}) dx = \\ &= -xe^{-x} \Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta} e^{-x} dx = (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^{\beta} = 1 - (\beta+1)e^{-\beta} . \end{aligned}$$

Значит, при $\beta = 3$ искомая площадь равна

$$S = 1 - \frac{4}{e^3} .$$

б) при неограниченных значениях x искомая площадь выражается *несобственным* интегралом

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} x e^{-x} dx = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\beta + 1}{e^{\beta}} \right) = 1 . \end{aligned}$$

Пример 6.6. Найти с какой силой притягивается точечная масса M

- а) отрезком тонкой нити длины L , находящейся на расстоянии H от M . Масса единицы длины нити равна μ ,
- б) той же нитью, но неограниченной длины.

Решение. а) Выберем прямоугольную систему координат, такую, что нить расположена на оси Ox , а массивная точка M – на оси Oy в точке B (см. рис.2.)

Рассмотрим отрезок нити малой длины dx , середина которого совпадает с точкой A , с координатами $\{x, 0\}$.

Поскольку масса этого отрезка μdx , то по закону всемирного тяготения величина силы притяжения между отрезком и точкой M равна $|\vec{dF}| = \gamma \frac{M\mu dx}{(AB)^2}$, где γ – гравитационная постоянная и (по теореме Пифагора) $(AB)^2 = x^2 + H^2$.

Сила $\vec{dF}$ является векторной величиной и ее следует суммировать по «правилу параллелограмма».

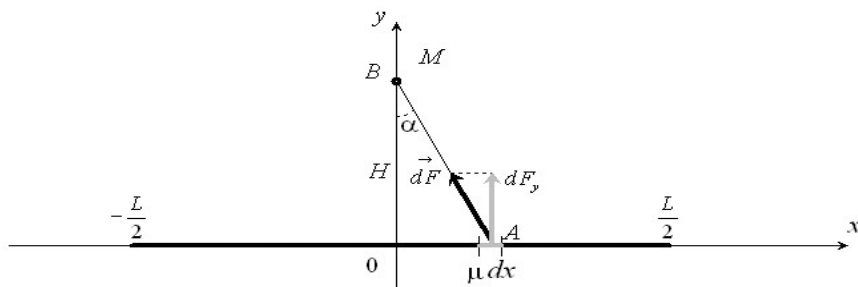


Рис. 2. Какова сила притяжения между точечной массой M и тонкой нитью?

В рассматриваемом случае взаимодействие между материальной точкой и нитью симметрично относительно оси Oy – силы действующие вдоль оси Ox взаимно уничтожаются, поэтому следует суммировать лишь силы dF_y , параллельные оси Oy . С учетом этой симметрии сила притяжения между M и нитью длины L будет равна *определенному* интегралу

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \gamma \frac{M\mu \cos \alpha \, dx}{x^2 + H^2} = 2\gamma M\mu H \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2 + H^2)\sqrt{x^2 + H^2}},$$

поскольку $dF_y = |\vec{dF}| \cos \alpha$, а $\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}}$.

Используя таблицы интегралов (или замену переменной $x = \operatorname{th} u$), получаем

$$\begin{aligned}
 F &= 2\gamma M\mu H \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2 + H^2)\sqrt{x^2 + H^2}} = \\
 &= 2\gamma M\mu \left(\frac{x}{H\sqrt{x^2 + H^2}} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{2\gamma M\mu}{H} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4H^2}}.
 \end{aligned}$$

б) Для случая бесконечной нити, полная сила притяжения выражается *несобственным* интегралом

$$\begin{aligned} F &= 2\gamma M\mu H \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + H^2)\sqrt{x^2 + H^2}} = \\ &= \frac{2\gamma M\mu}{H} \cdot \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4H^2}} = \\ &= \frac{2\gamma M\mu}{H} \cdot \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2}} = \frac{2\gamma M\mu}{H}. \end{aligned}$$

Несобственные интегралы от знакопостоянных функций

В значительном числе практически важных задач оказывается необходимым лишь устанавливать факт сходимости или расходимости несобственного интеграла, *без вычисления его значения*.

В этих случаях можно попытаться применить *признаки сходимости для несобственных интегралов*.

Рассмотрим непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные для любого x принадлежащего промежутку от a до $\forall \beta < b$ и такие, что справедливо неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx \leq \int_a^{\rightarrow b} g(x) dx$$

и в силу сохранения нестрогих неравенств при предельном переходе (см. теорему “о двух милиционерах”), можно утверждать, что из сходимости несобственного интеграла

$\int_a^{\rightarrow b} g(x) dx$ следует сходимость и

несобственного интеграла $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$, а из расходимости интеграла

$\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{\rightarrow b} g(x) dx$.

Здесь следует отметить, что в случае, например, сходимости интеграла от функции $f(x)$ заключение о сходимости или расходимости интеграла от $g(x)$ сделать невозможно.

Проиллюстрируем использование этих правил следующими примерами.

Пример 6.7. Не находя значения несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}},$$

выяснить, сходится он или нет.

Решение. На промежутке $[1, +\infty)$ справедливо неравенство

$$0 \leq \frac{1}{x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

поэтому из сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

(см. пример 6.3, при $p = \frac{3}{2} > 1$) будет следовать сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}}.$$

Пример 6.8. Не находя значения несобственного интеграла

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x-x^4}},$$

выяснить, сходится он или нет.

Решение. На промежутке $(0, \frac{1}{2}]$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x\sqrt{x-x^4}} \geq \frac{1}{x\sqrt{x}} \geq 0,$$

поэтому из расходимости интеграла

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

(см. пример 6.4, при $p = \frac{3}{2} > 1$) будет следовать расходимость интеграла

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x-x^4}}.$$

При исследовании на сходимость несобственных интегралов может оказаться полезной

Теорема 6.1. Если в некоторой окрестности особой точки $\rightarrow b$ для знакопостоянных функций $f(x)$ и $g(x)$ существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0,$$

то интегралы $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$ и $\int_a^{\rightarrow b} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, утверждение этой теоремы будет справедливо для эквивалентных функций.

Пример 6.9. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \left(\ln \frac{x^2 + 3x}{x^2} \right) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$$

Решение. Заметим, что подынтегральная функция является знакопостоянной в любой достаточно малой окрестности особой точки $+\infty$.

В каждой такой окрестности имеют место следующие отношения эквивалентности

$$\ln \frac{x^2 + 3x}{x^2} = \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \sim \frac{3}{x} \quad \text{и} \quad \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Тогда подынтегральная функция будет эквивалентна функции $\frac{1}{x\sqrt{x}}$. А исследуемый интеграл будет сходиться или расходиться одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} ,$$

который, как было показано в примере 6.4, сходится.

Пример 6.10. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_2^{\rightarrow +\infty} \frac{dx}{x^\lambda \ln^\mu x}.$$

Решение. 1) Особая точка $\rightarrow +\infty$. Пусть $\lambda > 1$ и можно считать, что $\lambda = 1 + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Тогда $\forall \mu$ имеем оценку

$$\frac{1}{x^{1+2\varepsilon} \ln^\mu x} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon \ln^\mu x},$$

где второй сомножитель стремится к нулю, а от первого интеграл сходится в особой точке $\rightarrow +\infty$. Значит, J сходится.

2) Пусть $\lambda < 1$ и можно считать, что $\lambda = 1 - 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.
В этом случае $\forall \mu$ имеем оценку

$$\frac{1}{x^{1-2\varepsilon} \ln^\mu x} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{x^\varepsilon}{\ln^\mu x},$$

где второй множитель стремится к бесконечности, а от первого интеграл расходится. Значит, J расходится.

3) Пусть, наконец, $\lambda = 1$. Тогда, при $\mu = 1$ расходимость очевидна, а при $\mu \neq 1$ по формуле Ньютона-Лейбница

$$J = \int_2^{\rightarrow+\infty} \frac{dx}{x \ln^\mu x} = \int_2^{\rightarrow+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^\mu x} = \frac{1}{1-\mu} \ln^{1-\mu} x \Big|_2^{\rightarrow+\infty}$$

получаем, что J сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$.

Пример 6.11. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_{0 \leftarrow}^1 \frac{|\ln x| dx}{x^\lambda}.$$

Решение. Здесь особая точка $0 \leftarrow$. Используя рассуждения, аналогичные примененным при решении примера 6.10, покажите самостоятельно, что в этом случае J сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.

Примеры 6.10 и 6.11 до некоторой степени обосновывают известную шутку теорфизиков о том, что «логарифм под интегралом ведет себя как константа».

Пример 6.12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_{0 \leftarrow}^{\rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} + x^3)^\lambda dx}{(x^8 + 2) \ln(e^x - x)}.$$

Решение. 1) У этого интеграла две особые точки $0 \leftarrow$ и $\rightarrow +\infty$. В окрестности каждой особой точки подынтегральная функция знакопостоянна. Применим правило сравнения, выделяя в этой функции главные части.

В окрестности особой точки «0» мы имеем:

$$\begin{aligned} \ln(e^x - x) &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \sim \frac{x^2}{2}, \\ x^8 + 2 &\sim 2, \\ (\sqrt{x} + x^3)^\lambda &\sim x^{\frac{\lambda}{2}} \end{aligned}$$

Поэтому $J \sim \int_{0 \leftarrow}^1 \frac{x^{\frac{\lambda}{2}}}{x^2} dx = \int_{0 \leftarrow}^1 \frac{dx}{x^{2-\frac{\lambda}{2}}} dx$, который сходится при $2 - \frac{\lambda}{2} < 1 \implies \lambda > 2$.

2) В окрестности особой точки « $+\infty$ » выделение главных частей дает:

$$\ln(e^x - x) \sim x,$$

$$x^8 + 2 \sim x^8,$$

$$(\sqrt{x} + x^3)^\lambda \sim x^{3\lambda}$$

В силу чего $J \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{3\lambda}}{x^9} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{9-3\lambda}}$, который сходится при $9 - 3\lambda > 1 \implies \lambda < \frac{8}{3}$.

Объединяя результаты 1) и 2), получаем, что J сходится при $2 < \lambda < \frac{8}{3}$. При остальных значениях параметра интеграл расходится.

Пример 6.13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_{0 \leftarrow}^{\rightarrow + \infty} \frac{\sqrt{x - \operatorname{th} x} \, dx}{\left(\sqrt{x + 2x^2} - \sqrt{x} \right)^\lambda}.$$

Решение. 1) Этот интеграл также имеет две особые точки $0 \leftarrow$ и $\rightarrow + \infty$, в окрестностях которых подынтегральная функция знакопостоянна. Выделим в числителе и знаменателе главные части.

Для особой точки «0»

$$\begin{aligned} \sqrt{x - \operatorname{th} x} &= \sqrt{\frac{x^3}{3} + o(x^4)} \sim x\sqrt{x}, \\ \left(\sqrt{x + 2x^2} - \sqrt{x} \right)^\lambda &\sim x^{\frac{3\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2x^2}-\sqrt{x} &= \\ &= \frac{2x^2}{\sqrt{x+2x^2}+\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x\sqrt{x}}+1} \sim x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Тогда $J \sim \int\limits_{0\leftarrow}^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3\lambda}{2}}} dx = \int\limits_{0\leftarrow}^1 \frac{dx}{x^{\frac{3\lambda}{2}-\frac{3}{2}}} dx$, а этот интеграл

сходится при $\frac{3\lambda}{2}-\frac{3}{2} < 1 \implies \lambda < \frac{5}{3}$.

2) Для особой точки « $+\infty$ », выделяя главные части, тем же приемом, что и в 1), находим

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2x^2}-\sqrt{x} &= \\ &= \frac{2x^2}{\sqrt{x+2x^2}+\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{\frac{1}{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim x\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$J \sim \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^\lambda} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda-\frac{1}{2}}} dx,$$

который сходится при $\lambda - \frac{1}{2} > 1 \implies \lambda > \frac{3}{2}$.

Окончательно получаем, что J сходится при $\frac{3}{2} < \lambda < \frac{5}{3}$.
При прочих значениях параметра интеграл расходится.

Несобственные интегралы от знакопеременных функций

В случае, когда подынтегральная функция в несобственном интеграле не является знакопостоянной, установление факта сходимости (или расходимости) с помощью признаков сравнения или, скажем, теоремы 6.1, оказывается невозможным.

Здесь придется использовать либо определения 6.1 — 6.3, либо специальные критерии, которые мы далее рассмотрим.

Предварительно дадим уточняющее

Определение
6.4

Несобственный интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} |f(x)| dx$.

Несобственный интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ называется *условно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$, но при этом является расходящимся интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} |f(x)| dx$.

Рассмотрим теперь критерии, использование которых возможно для несобственных интегралов от знакопеременных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена $\forall x \in [\alpha, b)$, где символ b обозначает либо число $b > \alpha$, либо $+\infty$. Пусть также $\forall \beta < b$ существует определенный интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Тогда справедлива

Теорема 6.2 (критерий Коши).	Несобственный интеграл	$\int_{\alpha}^b f(x) dx$	сходится
	тогда и только тогда, когда	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_{\varepsilon} \in [\alpha, b)$	
	такое, что $\forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta_{\varepsilon}, b)$	выполнено неравенство	
		$\left \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right < \varepsilon.$	

Критерий Коши удобен тем, что:

- в его формулировке используется только римановский (определенный) интеграл,
- для этого интеграла требуется находить не его значение, а только делать оценку,
- этот критерий есть одновременно необходимое и достаточное условие. То есть, он равносильен определению.

Для обоснования расходимости несобственных интегралов удобна

Теорема 6.3 (отрицание критерия Коши). **Несобственный интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \Delta \in [\alpha, b) \quad \exists \delta_{01}, \delta_{02} \in (\Delta, b)$ выполнено неравенство**

$$\left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0 .$$

Полезным инструментом исследования может оказаться, называемая *методом выделения главной части*,

Теорема 6.4 (о выделении главной части). **Пусть на промежутке $[a, b)$ функция $f(x)$ представима как $f(x) = g(x) + R(x)$, где функция $R(x)$ — абсолютно интегрируема. Тогда несобственные интегралы $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ и $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} g(x) dx$**

- **либо, одновременно сходятся абсолютно,**
- **либо, одновременно сходятся условно,**
- **либо, одновременно расходятся.**

В ряде случаев можно воспользоваться также следующими достаточными критериями.

Теорема 6.5 (признак Дирихле). Пусть на $[a, b)$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную, а функция $g(x)$ на этом промежутке непрерывно дифференцируема, монотонна и, кроме того, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$. Тогда несобственный интеграл вида $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x)g(x) dx$ сходится.

Теорема 6.6 (признак Абеля). Пусть на $[a, b)$ функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ сходится, а функция $g(x)$ на этом промежутке ограничена, непрерывно дифференцируема и монотонна. Тогда несобственный интеграл $\int_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x)g(x) dx$ сходится.

Заметим, что в признаках Дирихле и Абеля три (из пяти) условия одинаковые: $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$, а $g(x)$ монотонна и непрерывно дифференцируема.

Различающиеся пары условий можно сопоставить в виде следующей таблицы:

В признаке → ↓ функция	Дирихле	Абеля
$f(x)$	имеет ограниченную первообразную	интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\rightarrow b} f(x) dx$ сходится
$g(x)$	$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$	ограничена

Пример 6.14. Исследовать на сходимость при любых значениях параметра λ несобственный интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^\lambda}.$$

Решение. 1) Этот интеграл от знакопеременной функции и он сходится абсолютно при $\lambda > 1$. Действительно,

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\lambda} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x| \, dx}{x^\lambda} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda},$$

но последний интеграл сходится (см. пример 6.3). Значит, по признаку сравнения интеграл J сходится абсолютно.

2) При $\lambda \leq 0$ интеграл расходится. Докажем это, используя отрицание критерия Коши (теорема 6.3).

Для произвольного $\Delta \in (1, +\infty)$ подберем натуральное n такое, что $2\pi n > \Delta$. Для пределов интегрирования

$\delta_{01} = 2\pi n > \Delta$ и $\delta_{02} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > \Delta$ оценим «снизу»

$\forall \lambda \leq 0$ определенный интеграл

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \right| &\geq \left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} \sin x dx \right| = \\ &= \left| -\cos x \right|_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} = |(-0) - (-1)| = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, существует $\varepsilon_0 = 1$ такое, что для любых $\Delta \in (1, +\infty)$ имеются $\delta_{01} = 2\pi n$ и $\delta_{02} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, принадлежащие интервалу $(\Delta, +\infty)$, при которых справедливо неравенство

$$\left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \right| \geq \varepsilon_0 .$$

Значит, интеграл J согласно отрицанию критерия Коши расходится при $\forall \lambda \leq 0$.

3) Рассмотрим на полуинтервале $\lambda \in (0, 1]$ интеграл от знакопеременной функции

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx.$$

Пусть $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$. Тогда на промежутке $x \in [1, +\infty)$ имеем, что:

- $f(x)$ непрерывна,
- $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $-\cos x$,
- $g'(x) = -\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}$, т.е, непрерывна,
- $g(x)$ монотонна, т.к. $g'(x) < 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Тогда, по признаку Дирихле интеграл J сходится.

4) При $0 < \lambda \leq 1$ интеграл

$$I = \int_1^{\rightarrow+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\lambda} dx,$$

расходится.

Предварительно заметим, что

$$|\sin x| \geq |\sin x| \cdot |\sin x| = \sin^2 x$$

и докажем расходимость интеграла

$$\int_1^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} dx,$$

использовав снова отрицание критерия Коши.

Для произвольного $\Delta \in (1, +\infty)$ подберем натуральное n такое, чтобы $\pi n > \Delta$ и для пределов интегрирования $\delta_{01} = \pi n > \Delta$ и $\delta_{02} = 2\pi n > \Delta$ оценим «снизу» при $0 < \lambda \leq 1$ интеграл

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} dx \right| &\geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi n} \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Значит, существует $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ такое, что для любых $\Delta \in (1, +\infty)$ имеются $\delta_{01} = \pi n$ и $\delta_{02} = 2\pi n$, принадлежащие интервалу $(\Delta, +\infty)$, при которых справедливо неравенство

$$\left| \int_{\delta_{01}}^{\delta_{02}} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Тогда интеграл I расходится по отрицанию критерия Коши при $0 < \lambda \leq 1$.

Наконец, объединяя результаты 3) и 4), согласно определению 6.4 заключаем, что интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx.$$

сходится условно для $0 < \lambda \leq 1$.

Пример 6.15. Исследовать на сходимость при $\lambda > 0$ несобственный интеграл

$$J = \int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{th} x \, dx}{x^\lambda}.$$

Решение. 1) Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x^\lambda}$, $g(x) = \operatorname{th} x$ и убедимся, что данный интеграл сходится по признаку Абеля.

Действительно, имеем, что на $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и интеграл от нее (как было показано в примере 6.14) сходится при $\lambda > 0$.

2) Функция $g(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ очевидно ограничена $|g(x)| < 1$, и, кроме того (проверьте это самостоятельно!), в силу $g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$, монотонна.

В тех случаях, когда признаки Дирихле или Абеля не применимы, можно попытаться использовать метод *выделения главной части*.

Пример 6.16. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx .$$

Решение. 1) Заметим, что в силу формулы Маклорена функция под интегралом записывается в виде

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sin^3 x}{3x^2} + o \left(\frac{\sin^4 x}{x^2 \sqrt[3]{x^2}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} + R(x) ,$$

где $|R(x)| \leq \frac{C}{x^2}$ при $x > 1$. Проверьте это самостоятельно.

2) Поскольку интеграл от $R(x)$ сходится абсолютно, то по теореме 6.4 интеграл J имеет тот вид сходимости, что и

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx ,$$

который, как было показано при решении примера 6.14, сходится условно.

Рассмотрим еще один пример применения теоремы 6.4.

Пример 6.17. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x} + \sin x}.$$

Решение. 1) Используя формулы Маклорена, преобразуем подынтегральную функцию следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} &= \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + Q(x) \right) = \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + R(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } |R(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ при } x > 1.$$

2) Поскольку интеграл от $R(x)$ сходится абсолютно, то по теореме 6.4 интеграл J имеет тот вид сходимости, что и

$$I = \int_1^{\rightarrow+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} \right) dx ,$$

где первое слагаемое в круглых скобках интегрируемая функция, а второе — нет. Следовательно, J расходится

3) Заметим, что, хотя интеграл $\int_1^{\rightarrow+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится, а функция $\sin x$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $\sqrt{x}$ в окрестности особой точки $\rightarrow +\infty$, применять признак Дирихле в данной задаче нельзя, поскольку не выполнено условие *монотонного* (см. рис.3) стремления функции $g(x)$ к нулю.

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad G(x) := \frac{1}{\sqrt{x} + \sin(x)}$$

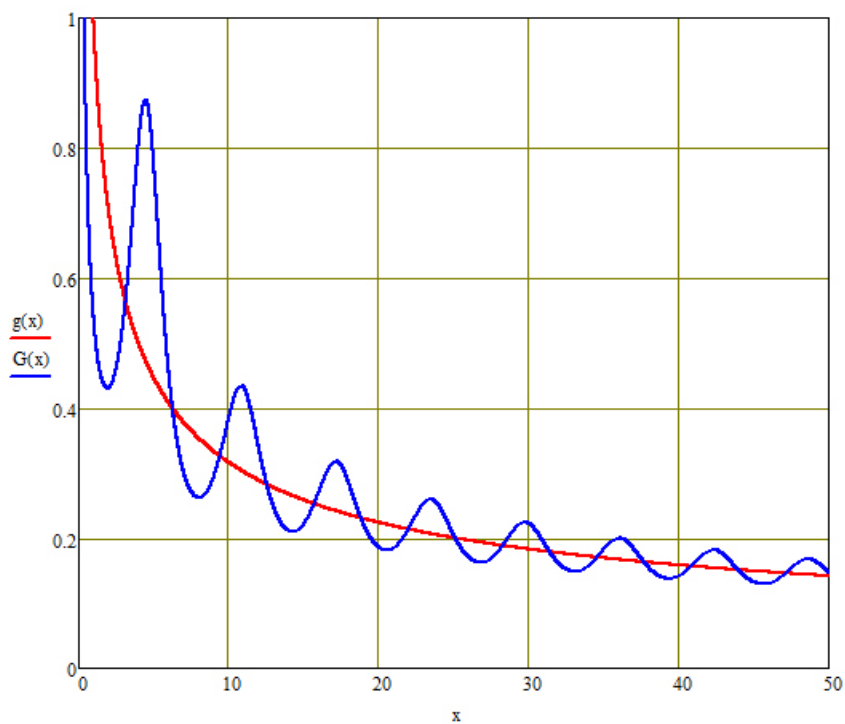


Рис. 3

Пример 6.18. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$J = \int_1^{\rightarrow +\infty} \cos x^2 dx .$$

Решение. 1) Сделаем замену переменной интегрирования $u = x^2$ так, чтобы аргумент тригонометрической функции стал линейным. Тогда $x = \sqrt{u}$ и $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Значит,

$$J = \frac{1}{2} \int_1^{\rightarrow +\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du ,$$

то есть, интеграл сходится условно по признаку Дирихле.

Заметим, что данный пример, показывает, что для сходимости несобственного интеграла от непрерывной $f(x)$ в окрестности особой точки $+\infty$ условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ не является необходимым.

Исследовав на сходимость интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx,$$

покажите самостоятельно, что и ограниченность непрерывной подынтегральной функции также не является необходимым условием сходимости интеграла.