Пространство R^n

Напомним предварительно, что термин *функция* обозначает совокупность двух числовых множеств — *области определения* (*множества аргументов*) и *множества значений* , а также *правила*, по которому каждому числу из области определения ставится в соответствие единственное число из множества значений.

Вполне естественно допустить, что возможна ситуация, когда значение функции зависит от более, чем одного числового аргумента. В этом случае можно ввести понятие функции нескольких (многих) переменных, например, так:

> Будем говорить, что задана *функция многих переменных*, если указано правило, по которому для каждого фиксированного набора упорядоченных вещественных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ поставлено в соответствие единственное число из множества значений.
>
> Функцию многих переменных будем обозначать так $f\big(x\big)$ или, более детально, $f\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$. Здесь x (без индекса) обозначает весь набор $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Это определение полностью аналогично определению функции, зависящей от одной переменной, и его можно будет использовать так же эффективно, если мы преодолеем следующее затруднение.

При описании или исследовании свойств функции одной переменной $f(x)$ существенным являлось сравнение величин изменения значений как функции, так и ее аргумента. Для этой цели мы использовали модули разности соответствующих чисел, то есть, $|\,x_{(1)} - x_{(2)}\,|$ и $|\,f(x_{(1)}) - f(x_{(2)})\,|$.

В случае функции многих переменных модуль разности годится для оценки степени близости значений функции. Однако возникает вопрос: как оценить степень близости двух наборов упорядоченных чисел, скажем, таких

$$\{x_{1(1)}, x_{2(1)}, \ldots , x_{n(1)}\} \quad \text{и} \quad \{x_{1(2)}, x_{2(2)}, \ldots , x_{n(2)}\} .$$ [1]

[1] Договоримся, что нижний индекс без скобок является номером переменной, а нижний интекс в скобках — номер набора переменных.

Возможным способом построения нужной нам оценки степени близости, которая по сути есть расстояние между такими наборами, является следующий.

Рассмотрим совокупность всевозможных упорядоченных наборов, состоящих из n упорядоченных вещественных чисел, каждый их которых будем записывать в матричной форме в виде n-компонентной строки $\| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \|$. Эту совокупность будем обозначать как R^n.

Вначале превратим R^n в n-мерное *линейное пространство*, введя по определению в этом множестве понятия:

— *равенства элементов*

$$\| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \|_{(1)} = \| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \|_{(2)} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_{1(1)} = x_{1(2)} \, , \\ x_{2(1)} = x_{2(2)} \, , \\ \ldots \\ x_{n(1)} = x_{n(2)} \, . \end{array} \right.$$

— *суммы элементов*

$$\| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \|_{(1)} + \| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \|_{(2)} =$$

$$= \| \; x_{1(1)} + x_{1(2)} \quad x_{2(1)} + x_{2(2)} \quad \ldots \quad x_{n(1)} + x_{n(2)} \; \| \, .$$

— *умножения числа на элемент*

$$\lambda \, \| \, x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \, \| \; = \; \| \, \lambda \, x_1 \; \lambda \, x_2 \; \ldots \; \lambda \, x_n \, \| \, .$$

Затем, поскольку в линейном пространстве нет метрических характеристик (таких как, длина, расстояние, величина угла), то превратим R^n еще и в *евклидово пространство*, введя операцию *скалярного произведения элементов* $x = \| x_1 \, x_2, \dots \, x_n \|$ и $y = \| y_1 \, y_2, \dots \, y_n \|$ по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,.$$

Скалярное произведение позволяет использовать для элементов в R^n такие понятия как

— *норма (длина) элемента* x $\quad |x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$

— *расстояние между элементами* x *и* y

$$\rho(x, y) = |\, x - y \,| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,. \quad (1.1)$$

Заметим, что элемент $x - y$ существует в R^n для любой пары элементов x и y, поскольку в R^n (как в линейном пространстве) элемент $x - y$ есть сумма x и $(-1)y$.

В каждом евклидовом пространстве для двух произвольных элементов x и y справедливы следующие соотношения:

— неравенство *Коши-Буняковского* $|(x,y)| \le |x|\,|y|$, которое в R^n имеет вид

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}$$

— неравенство *треугольника* $|x+y| \le |x| + |y|$, что в R^n будет

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + y_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\ .$$

Приведем (для справки) некоторые определения специальных элементов и подмножеств в R^n .

Определение 1.1	Множество элементов x таких, что $\rho(x, x_0) \le r$, нызывается *шаром* или *окрестностью* радиуса r с центром в x_0 .

Определение 1.2	Окрестность элемента x_0 называется *проколотой*, если она состоит из элементов x_0, для которых $0 < \rho(x, x_0) \le r$.

Определение 1.3	Элемент x_0 называется *внутренним* для множества $M \subset R^n$, если $x_0 \in M$ вместе с некоторым шаром ненулевого радиуса , с центром в x_0.

Определение 1.4	Множество M называется *открытым*, если все его элементы внутренние.

Определение 1.5	Элемент x_0 называется *предельной точкой* множества M, если в любой окрестности этого элемента имеется хот бы один элемент из M.

Предельная точка множества M может как принадлежать, так и не принадлежать M.

Определение 1.6	Множество M называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре с ненулевым радиусом.

Определение 1.7	Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 1.8	Элемент x называется *граничным*, если в любой его окрестности имеются как точки, принадлежащие M, так и не принадлежащие этому множеству.

Определение 1.9	Говорят, что множество элементов $$\|x(t)\| = \| \, x_1(t) \, x_2(t) \, \ldots \, x_n(t) \, \| \,,$$ образует *линию* в R^n, если $x_k(t) \ \forall k = \overline{1,n}$ суть непрерывные при $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ функции.

Определение 1.10	Множество M называется *связанным*, если две любые его точки можно соединить линией, целиком принадлежащей M.

Определение 1.11	Открытое и связанное множество называется *областью.* Замкнутое и ограниченное множество называется *компактом.*

Определение 1.12	*Уровнем* функции $f(x)$ называется совокупностьа элементов в R^n таких, что $f(x) = c \in (R)$. В случае $n = 2$ говорят о *линии уровня,* а в случае $n = 3$ используется термин *поверхность уровня.*

При небольших значениях n также принято не использовать индексацию компонентов элемента x, а применять для их обозначения разные символы.

Пример 1.1.1. Найти для $z = f(x,y) = e^{2xy} - e^{xy} + 2$ область определения, область значения и линии уровня

1. В данном случае $n = 2$ и все операции, использованные в формуле задающей функцию выполнимы при любых x и y, поэтому область определения есть открытое множество вида $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (-\infty, +\infty)$.

2. Поскольку верно равенство

$$z = f(x,y) = \left(e^{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то областью значений будет полуинтервал, для которого $z \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

3. Линиями уровня для данной функции очевидно будут линии $xy = const$, то есть, гиперболы, прямые (оси координат), либо точка (начало координат).

$$z = f(x,y) = \left(e^{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то областью значений будет полуинтервал, для которого $z \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

Предел функции многих переменных

В пространстве R^n дадим

Определение 1.13	Будем говорить, что в R^n задана последовательность элементов $\{x_{(k)}\}$, если для каждого натурального числа k однозначно определен некоторый элемент $\| \, x_{1(k)} \; x_{2(k)} \; \ldots \; x_{n(k)} \, \| \in R^n$.

Заметим, что в этом случае каждая компонента $\{x_{(k)}\}$, то есть, $\{x_{j(k)}\} \;\; \forall j = \overline{1, n}$, является обычной числовой последовательностью.

Теперь мы можем ввести понятие предела последовательности элементов в R^n.

Определение 1.14	Элемент $a \in R^n$ называется *пределом* последовательности $\{x_{(k)}\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq N_\varepsilon \;\; \rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Символически это принято обозначать так $\lim\limits_{k \to \infty} x_{(k)} = a$.

Как нетрудно заметить, данное определение повторяет определение предела числовой последовательности, в котором $|\, x_n - a \,|$ заменен на $\rho(x_n, a)$.

Теперь мы может дать такие определения предела функции многих переменных

Определение 1.15 (по Гейне)	Число A называется *пределом* функции $f\big(x\big)$ на элементе (в точке) $a \in R^n$, если для *любой* последовательности $\{x_{(k)}\}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{(k)} = a\,, \ \ x_{(k)} \neq a\,,$ имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} f\big(x_{(k)}\big) = A\,.$

а также, равносильное ему,

Определение 1.16 (по Коши)	Число A называется *пределом* функции $f\big(x\big)$ на элементе (в точке) $a \in R^n$, если $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих $0 < \rho(x,a) < \delta_\varepsilon$, выполняется $\big\lvert f(x) - A\big\rvert < \varepsilon$.

Символически предел функции многих переменных принято обозначать $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\,.$

Пределы вида 1.15 (или 1.16) называются *пределами в точке* (или, просто, *пределами*). Помимо них, для функций многих переменных рассматривают, так называемые, *повторные пределы*, являющиеся последовательным вычислением обычных пределов по всем переменным. Например, при $n = 2$ для функции $f(x, y)$ можно указать два повторных предела вида

$$\lim_{y\to b}\Bigl(\lim_{x\to a} f(x,y)\Bigr) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{y\to b} f(x,y)\Bigr)\,.$$

Для функции, зависящей от n переменных число различных повторных пределов равно $n!$.

Изменение порядка предельных переходов по отдельным переменным в повторных пределах, вообще говоря, не допустимо. Например, для функции $u(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ имеем

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = -1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = 1\,.$$

Пример 1.1.2. Показать, что для функции

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k y}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

кратный предел в начале координат существует для $k = 2$ и не существует при $k = 1$.

Решение. 1. Пусть $k = 2$. Применим определение 1.1.16 (по Коши) и покажем, что

$$\lim_{\|x,y\| \to \|0,0\|} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, для которого

$$|x| \leq \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon = \varepsilon \qquad \forall y\,.$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши,

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = |x| \frac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{2} < \varepsilon$$

на любой траектории, ведущей в начало координат.

2. Рассмотрим другой метод решения. Перейдем в полярную систему координат, тогда из

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

следует

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\varphi\, r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,.$$

Но это выражение стремится к нулю, поскольку на любой траектории, ведущей в начало координат, то есть, $\forall\varphi(r)$ имеет место $r \to 0$.

3. Разберем теперь случай с $k = 1$. Здесь удобнее использовать определение (точнее, отрицание определения) по Гейне.

Конкретно, для того, чтобы функция $u(x, y)$ не имела предела в точке $\| x_0 \, y_0 \|$, достаточно найти две различные последовательности $\left\{ \| x_{(1)m} \;\; y_{(1)m} \| \right\}$ и $\left\{ \| x_{(2)m} \;\; y_{(2)m} \| \right\}, \|$ сходящиеся в R^2 при $m \to \infty$ к предельной точке, на которых числовые последовательности

$$u\Big(x_{(1)m} \, , \; y_{(1)m}\Big) \qquad \text{и} \qquad u\Big(x_{(2)m} \, , \; y_{(2)m}\Big)$$

имеют различные пределы.

Для Примера 1.1.2 такими последовательностями могут служить, сходящиеся к началу координат, последовательности вида $\left\{ \left\| \frac{1}{m} \;\; 0 \right\| \right\}$ и $\left\{ \left\| \frac{1}{m} \;\; \frac{1}{m} \right\| \right\}$.

Для первой из них, мы идем в наналo координат по оси Ox И для этой последовательности будет

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\cdot 0}{\frac{1}{m^2}+0^2} = 0\,.$$

Для второй, мы идем в наналo координат по биссектрисе первого координатного угла В этом случае имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, согласно отрицанию определения предела по Гейне, функция, указанная в формулировке Примера 1.1.2, при $k = 1$ в начале координат пространства R^2, предела не имеет.

В случае функции многих переменных естественно возникает вопрос: как связаны значения (в случае их существования) пределов разных типов?

Принадлежность предельной траектории множеству T является некоторым дополнительным ограничением. Поэтому, казалось бы, что из существования предела по подмножеству, должно следовать существование обычного предела. Однако, это не обязательно так. Для иллюстрации используем

Пример 1.1.3. Показать, что для функции

$$u(x,y) = x^2 e^{y-x^2}$$

1. Имеется предел при $\| \, x \; y \, \| \to \| \infty \infty \|$ на множестве T, всех лучей, исходящих из начала координат.
2. Выяснить, существут ли соответствующий кратный предел

Решение.

1. Множество T может быть параметрически задано так:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t \,, \\ y(t) = \beta t \,, \end{cases}$$

где $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \,.$

2. На луче с фиксированными α и β выберем предельную последовательность вида

$$\begin{cases} x_m = m\,\alpha\,, \\ y_m = m\,\beta\,. \end{cases}$$

Причем очевидно, что при $\alpha = 0$

$$\lim_{m\to\infty} u(x_m, y_m) = 0\,.$$

Если же $\alpha = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} u(x_m, y_m) = (m\alpha)^2 e^{m\beta-(m\alpha)^2} = 0\,,$$

в чем можно убедиться, применив, например, правило Лопиталя.

Итак, на множестве T предел рассматриваемой функции равен 0 .

3. Покажем теперь, что кратного предела для рассматриваемой функции нет. Для этого выберем предельную последовательность вида:

$$\begin{cases} x_m = m\,\alpha\,, \\ y_m = m^2\,\beta\,. \end{cases}$$

Точки этой последовательности лежать на параболе, причем показатель экспоненты для каждой точки равен нулю Тогда очевидно, что

$$\lim_{m\to\infty} u(x_m, y_m) = +\infty\,.$$

И двойной (кратный) предел рассматриваемой функции не существут. В силу отрицания определения предела по Гейне.