



Имеет место

Теорема  
(правило Крамера).

Для того чтобы система линейных уравнений (6.4.1) имела *единственное* решение, необходимо и достаточно, чтобы  $\Delta = \det \| A \| \neq 0$ , и в этом случае решение данной системы будет иметь вид

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\Delta_i$  – определитель матрицы, получаемой из матрицы  $\| A \|$  заменой ее  $i$ -го столбца на столбец свободных членов  $\| b \|$ :

$$\Delta_i = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_n & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

↑  
 $i$ -й столбец

Пример 01. Найти все решения системы линейных уравнений  $\begin{cases} \mu x_1 + 8x_2 = \mu + 4, \\ 2x_1 + \mu x_2 = \mu \end{cases}$  для любых значений параметра  $\mu \in \mathbf{R}$ .

Решение: 1). Теорема Крамера утверждает: для того, чтобы система линейных уравнений  $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \beta_2 \end{cases}$  имела единственное решение  $\{x_1^*; x_2^*\}$ , необходимо

и достаточно, чтобы  $\Delta \neq 0$ , при этом  $x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}$  и  $x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ , где

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

В случае, когда  $\Delta = 0$ , требуется специальное исследование.

2). В нашем случае

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \mu & 8 \\ 2 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 16,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \mu + 4 & 8 \\ \mu & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 4\lambda \quad \text{и}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \mu & \mu + 4 \\ 2 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 2\mu - 8.$$

Поэтому при  $\mu \in (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$  по теореме Крамера система имеет единственное решение

$$x_1^* = \frac{\mu}{\mu + 4}; \quad x_2^* = \frac{\mu + 2}{\mu + 4}.$$

3). При  $\mu = -4$  система имеет вид  $\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = -4. \end{cases}$  Решений тут нет.

4). Наконец, при  $\mu = 4$  система будет  $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 = 4. \end{cases}$  Она имеет бесчисленное множество решений, описываемых формулой

$$\begin{cases} x_1^* = 2 - 2\tau \\ x_2^* = \tau \end{cases}; \quad \tau \in (-\infty, +\infty).$$

## Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу  $\|A\|$  размера  $m \times n$ . Пусть число  $k$  такое, что  $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$ . Выберем некоторым способом в  $\|A\|$   $k$  столбцов и  $k$  строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную матрицу *минора порядка  $k$* .

Пусть при данном  $k$  все миноры  $k$ -го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем  $k$ , поскольку каждый минор  $(k+1)$ -го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка  $k$ .

Определения Максимальный из порядков, отличных от нуля миноров матрицы  $\|A\|$ , называется *рангом* матрицы и обозначается  $\text{rg}\|A\|$ .

Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Далее рассмотрим  $n$  штук  $m$ -компонентных столбцов вида

$$\|a_1\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}; \quad \|a_2\| = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad \|a_n\| = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

и столбцы  $\|b\| = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}; \quad \|o\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец  $\|b\|$  есть *линейная комбинация столбцов*

$$\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|,$$

если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , такие, что  $\|b\| = \sum_{j=1}^n \lambda_j \|a_j\|.$

Теорема **Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.**  
(О базисном миноре).

Определение

Столбцы  $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$  будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , такие, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \|a_j\| = \|o\|, \quad \left( \sum_{j=1}^n |\lambda_j| > 0 \right).$$

Леммы

**Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

**Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.**

Теорема

**Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.**

Теорема

(О ранге матрицы).

**Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.**



Пример 02. Найти ранг матрицы размера  $100 \times 200$ , все элементы которой равны 5.

Решение: 1). С одной стороны искомый ранг не меньше единицы, поскольку есть ненулевой минор первого порядка отличный от нуля. Например, это детерминант квадратной подматрицы размера  $1 \times 1$ , являющейся первым элементом в первой строке и первом столбце.

2). С другой стороны, *любой* минор второго порядка в данной матрице имеет вид  $\det \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ . Значит, ранг этой матрицы строго меньше 2.

3). Сопоставление п.1 и п.2 приводит к заключению, что искомый ранг равен единице.

Для практического подсчета ранга применяется *метод Гаусса*, который заключается в последовательном изменении матрицы, при котором величина определителей квадратных подматриц (а, значит, и величина ранга) не меняется, а вычисление ранга итоговой матрицы оказывается легко выполнимым по его определению.

Пример 03. Используя метод Гаусса, найти ранг матрицы

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 2 & -6 & 10 & -10 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{vmatrix}.$$

Решение: 1).. Поскольку исходная матрица имеет две одинаковые строки, то, заменив четвертую строку разностью первой и четвертой, получим

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 2 & -6 & 10 & -10 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 & -10 \\ 3 & -6 & 12 & -12 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 14 & -14 \end{vmatrix}.$$

Нулевую строку можно выбросить, поскольку она не влияет на величину ранга матрицы.

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \\ -7 & 3 & -17 & 17 \\ 4 & 1 & 7 & -7 \end{vmatrix}.$$

2). Далее зануляем все элементы первого столбца, кроме, расположенного в первой строке. Для этого вторую строку заменим разностью первой и второй. Третью заменим суммой третьей и второй, умноженной на 7. Четвертую строку заменим разностью четвертой и второй, умноженной на 4.

$$\operatorname{rg} \|A\| = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & 18 & -18 \\ 0 & 13 & -13 & 13 \end{vmatrix}.$$

Затем, вынося из третьей строки 18, а из четвертой 13, получим:

$$\operatorname{rg} \|A\| = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

На последнем шаге третью строку заменяем разностью третьей и второй. Наконец, четвертую строку заменяем суммой четвертой и второй. В итоге получаем матрицу с очевидным значением ранга

$$\operatorname{rg} \|A\| = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$