

## Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без пропусков и повторений) как  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ . Напомним, что полное число таких различных перестановок равно  $n!$ .

**Определение** Будем говорить, что числа  $k_i$  и  $k_j$  образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка*, или *инверсию*), если при  $i < j$  имеет место  $k_i > k_j$ .

Полное число беспорядков в перестановке  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$  будем обозначать  $B(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Например,  $B(3, 1, 4, 2) = 3$ .

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \|\alpha_{ij}\|; i, j = [1, n].$$

Определение *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы  $\|A\|$  размера  $n \times n$  называется число  $\det\|A\|$ , получаемое по формуле

$$\det\|A\| = \sum_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{B(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n},$$

где  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$  – всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы  $\|A\|$ .

Поскольку в этом определении указано, что сумма берется по всем *возможным различным* перестановкам, то число слагаемых равно  $n!$ .

Из данного определения также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве множителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

### **Свойства определителей**

- Теорема **При транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется.**
- Следствие **Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, справедливо для ее строк, и наоборот.**
- Теорема **При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.**
- Следствие **Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Теорема  
(линейное свойство определителя).

Если  $k$ -й столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц,  $k$ -ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из исходной линейной комбинации.

Следствия

При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.

Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.

Теорема

Определитель произведения матриц размера  $n \times n$  равен произведению их определителей, то есть

$$\det(\|A \| \|B \|) = \det \|A \| \cdot \det \|B \|.$$

## Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице  $n$ -го порядка  $\|A\|$  строки с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцы с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , где  $1 \leq k \leq n$ .

Определения Детерминант квадратной матрицы порядка  $k$ , образованной элементами, стоящими на пересечении строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , называется *минором  $k$ -го порядка* и обозначается  $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ .

Детерминант квадратной матрицы порядка  $n - k$ , образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , называется *минором, дополнительным к минору*  $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ , и обозначается  $\overline{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ .

Выберем в матрице  $\|A\|$   $i$ -ую строку и  $j$ -ый столбец, на пересечении которых расположен элемент  $\alpha_{ij}$ . Удалим из  $\|A\|$  выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу  $\|A^+\|$  размера  $(n-1) \times (n-1)$ .

Определение Детерминант матрицы  $\|A^+\|$  называется *дополнительным минором*  $\overline{M}_i^j$  элемента  $\alpha_{ij}$ .

Сгруппируем в определении детерминанта матрицы  $\|A\|$  – все  $(n-1)!$  слагаемых, содержащих элемент  $\alpha_{ij}$ , и вынесем его за скобки. Получим выражение вида

$$\det \|A\| = \alpha_{ij} D_{ij} + \dots$$

Определение Число  $D_{ij}$  называется *алгебраическим дополнением* элемента  $\alpha_{ij}$ .

Заметим, что по этому определению имеют место равенства

$$\det \|A\| = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} D_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} D_{kj} \quad \forall j = [1, n], \forall i = [1, n],$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц.

Итак, имеют место равенства

$$\det \|A\| = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} D_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} D_{kj} \quad \forall j = [1, n], \forall i = [1, n],$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц, находя значения алгебраических дополнений при помощи соотношений, которые устанавливает следующая теорема

Теорема **Справедливы равенства**  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$ .

Следствие **Разложение определителя по  $i$ -му столбцу имеет вид**

$$\det \|A\| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \overline{M}_k^i$$

**или**

$$\det \|A\| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} M_k^i \overline{M}_k^i.$$

Для практических приложений особо полезной является

Теорема **Для любой квадратной матрицы  $\|A\|$  имеет место равенство**

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} D_{is} = \delta_{js} \cdot \Delta,$$

где  $\Delta = \det\|A\|$  и  $\delta_{js} = \begin{cases} 1, & j = s, \\ 0, & j \neq s \end{cases}$  – символ Кронекера.

Следствие **Если квадратная матрица  $\|A\|$  невырождена, то элементами ее обратной матрицы  $\|A\|^{-1}$  являются числа**

$$\beta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \overline{M}_j^i}{\Delta}; \quad i, j = [1, n].$$

Пример 01. Показать без непосредственного вычисления, что детерминант:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

делится без остатка на 59, если известно, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} 59 \times 23 &= 1357, \\ 59 \times 41 &= 2419, \\ 59 \times 67 &= 3953, \\ 59 \times 19 &= 1121. \end{aligned}$$

Решение: 1). Значение детерминанта не изменится, если матрица будет протранспонирована. Поэтому

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2). Выполним с полученной матрицей следующие, не меняющие значения ее детерминанта преобразования. К последнему столбцу последовательно прибавим:

третий столбец, умноженный на 10,  
затем второй столбец, умноженный на 100,  
и, наконец, первый столбец, умноженный на 1000.

В итоге получим:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1357 \\ 2 & 4 & 1 & 2419 \\ 3 & 9 & 5 & 3953 \\ 1 & 1 & 2 & 1121 \end{vmatrix}.$$

3). Согласно условию задачи и следствию из линейного свойства определителя, из четвертого столбца можно вынести общий множитель 59. Это дает

$$\Delta = 59 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 41 \\ 3 & 9 & 5 & 67 \\ 1 & 1 & 2 & 19 \end{vmatrix} = 59 \cdot K,$$

где, в силу определения детерминанта, число  $K$  - целое. Поэтому будет целым и число  $\Delta$ .

Пример 02. Найти определитель матрицы  $n$ -го порядка:

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Решение:

1). Заметим, что сумма элементов каждого столбца матрицы одинакова и равна  $x + a(n-1)$ . Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

2). Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на  $a$ , получим

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}.$$

3). Последовательно применив  $n-1$  раз формулу для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

$$\Delta_n = (x + a(n-1))(x-a)^{n-1}.$$

Пример 03. Найти определитель матрицы  $n$ -го порядка:

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение: 1). Заметим, что при  $n = 3$ , разлагая детерминант по первой строке имеем

$$\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 = 4,$$

а для  $n = 4$ , аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \Delta_3 - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 = 5. \end{aligned}$$

2). Напишем теперь разложение  $\Delta_n$  по первой строке

$$\Delta_n = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \Delta_{n-2}$$

3). Рассмотрим рекуррентное соотношение  $\Delta_n = 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \Delta_{n-2}$  как разностное уравнение, считая  $\Delta_n$  неизвестной функцией от  $n$ .

Его решением является любая линейная функция вида  $\Delta_n = an + b$ , где  $a$  и  $b$  - некоторые константы. Действительно,

$$an + b = 2 \cdot (a(n-1) + b) - (a(n-2) + b) \Rightarrow 0 = 0.$$

Значения констант  $a$  и  $b$  найдем из условий

$$\begin{cases} \Delta_3 = 4, \\ \Delta_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 3 + b = 4, \\ a \cdot 4 + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1.$$

Таким образом,  $\Delta_n = n + 1$ .