АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (Задачи)

Будем использовать следующие обозначения:

в *исходной* системе координат для *данной* точки, с координатным представлением $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$, *образом* будет являться точка с координатным представлением $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$. В *новой* системе координат (если такая потребуется) *данная* точка будет иметь координатное представление $\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix}$, а координатное представление ее образа будет $\begin{Vmatrix} x'^* \\ y'^* \end{Vmatrix}$.

Пример 01. Для прямой $3x-2y-2=0$ найти ее прообраз при преобразовании плоскости $\begin{cases} x^* = -2x+y-3, \\ y^* = -x+2y-3. \end{cases}$

Решение: 1) Данное преобразование аффинное, поскольку $\det\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = -3 \neq 0$. Известно, что при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую. Поэтому задача заключается в отыскании связи между координатами x и y, при условии, что $3x^*-2y^*-2=0$.

2) Подставляем в уравнение образа $3x^*-2y^*-2=0$ формулы преобразования, получаем искомую линейную связь

$$3(-2x+y-3)-2(-x+2y-3)-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x+y+5=0 \ .$$

Пример 02. Для прямой $9x-9y-7=0$ найти ее образ при преобразовании плоскости
$$\begin{cases} x^* = \phantom{3x+{}} 6y-5, \\ y^* = 3x+6y-5. \end{cases}$$

Решение: 1) Это преобразование аффинное, поскольку $\det\begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix} = -18 \neq 0$. Поскольку при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, то. данная задача заключается в отыскании связи между координатами x^* и y^*, при условии, что $9x-9y-7=0$.

2) Для этого нам потребуются формулы преобразования, *обратного* к данному. Известно, что для каждого аффинного преобразования существует единственное обратное и оно также аффинное. В нашем случае рассмотрим формулы данного преобразования как систему линейных уравнений с неизвестными x и y. Выразив x и y через x^* и y^*, получим
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}y^*, \\ y = \frac{1}{6}x^* \phantom{+\frac{1}{3}y^*} + \frac{5}{6}. \end{cases}$$

3) Подставив теперь в уравнение прообраза $9x-9y-7=0$ формулы обратного преобразования, получаем уравнение искомого образа
$$9(-\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}y^*) - 9(\frac{1}{6}x^* + \frac{5}{6}) - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^* - 6y^* + 58 = 0 \ .$$

Пример 03. При некотором аффинном преобразовании плоскости имеет место следующее:

$$\text{образом точки } \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \text{ является точка } \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$\text{образом точки } \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \text{ является точка } \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$\text{образом точки } \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \text{ является точка } \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Какие точки плоскости остаются при этом преобразовании неподвижными?

Решение: 1) Пусть данное задается формулами $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$. Найдем его.

2) Из первого условия $\begin{cases} 0 = \alpha_{11}0 + \alpha_{12}0 + \beta_1, \\ 1 = \alpha_{21}0 + \alpha_{22}0 + \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1. \end{matrix}$

Из второго условия $\begin{cases} 1 = \alpha_{11}0 + \alpha_{12}1 + 0, \\ 1 = \alpha_{21}0 + \alpha_{22}1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{22} = 0. \end{matrix}$

Наконец, из третьего условия $\begin{cases} 0 = \alpha_{11}1 + 1 \cdot 1 \quad , \\ 0 = \alpha_{21}1 + 0 \cdot 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_{11} = -1, \\ \alpha_{21} = -1. \end{matrix}$

В итоге: $\begin{cases} x^* = -x + y, \\ y^* = -x \qquad +1. \end{cases}$ Это преобразование очевидно аффинное.

3) Пусть $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ - неподвижная точка полученного преобразования. Тогда должно быть $\begin{cases} x_0 = -x_0 + y_0, \\ y_0 = -x_0 \qquad +1. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = \dfrac{1}{3}, \\ y_0 = \dfrac{2}{3} \end{matrix}$. Неподвижная точка единственная.

Пример 04. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором все точки прямой $x+y-1=0$ неподвижны, а точка $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ имеет своим образом точку с координатами $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Решение: 1) Пусть искомое преобразование задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}.$$

Их условия $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ сразу получаем, что $\begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

2) Использум теперь условие неподвижности каждой точки прямой $x+y-1=0$.

Пусть точка $\begin{Vmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{Vmatrix}$ $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ произвольная точка этой прямой. Тогда условие ее неподвижности будет:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}(1-x_0) + 1, \\ 1-x_0 = \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}(1-x_0) + 1. \end{cases}$$

3) Эти равенства перегруппмруем к виду

$$\begin{cases}(\alpha_{11}-\alpha_{12}-1)x_0+(\alpha_{12}+1)=0,\\ (\alpha_{21}-\alpha_{22}+1)x_0+\alpha_{22}=0.\end{cases}$$

Откуда, с учетом $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, из

$$\begin{cases}\alpha_{11}-\alpha_{12}-1=0,\\ \alpha_{12}+1=0,\\ \alpha_{21}-\alpha_{22}+1=0,\\ \alpha_{22}=0,\end{cases}$$ получаем ответ задачи: $$\begin{cases}x^*= \quad -y+1,\\ y^*=-x \quad +1.\end{cases}.$$

Пример 05. Найти все инвариантные прямые аффинного преобразования плоскости
$$\begin{cases} x^* = -28x + 18y + 65\,, \\ y^* = -45x + 29y + 107. \end{cases}$$

Решение: 1) Пусть прямая-прообраз имеет уравнение $Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$, а ее образ - уравнение $Ax^* + By^* + C = 0$ или
$$A(-28x + 18y + 65) + B(-45x + 29y + 107) + C = 0\ .$$
А это значит, что $(-28A - 45B)x + (18A + 29B)y + (65A + 107B + C) = 0$.

2) Поскольку уравнение прямой определяется с точностью до ненулевого множителя, то условие *инвариантности* будет иметь следующий вид:
$$\begin{cases} A^* = kA = -28A \ - 45B, \\ B^* = kB = \ \ 18A \ + 29B, \\ C^* = kC = \ 65A + 107B + C. \end{cases}$$

3) Заметим, что первые два уравнения образуют линейную однородную систему:

$$\begin{cases}(-28-k)A-45B=0,\\ 18A+(29-k)B=0.\end{cases}$$

Поскольку A и B не могут равняться 0 одновременно, то необходимо выполнение (следующего из теории систем линейных уравнений) условия:

$$\det\begin{Vmatrix}-28-k & -45\\ 18 & 29-k\end{Vmatrix}=0,$$

которое дает

$$(k+28)(k-29)+18\cdot 45=0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2-k-2=0.$$

Откуда либо $k=2$, либо $k=-1$ и можно взять

при $k=2$ $A=3,\ B=-2,\ C=-19,$ а при $k=-1$ $A=5,\ B=-3,\ C=-2.$

Следовательно, искомые инвариантные прямые будут:

$$3x-2y-19=0 \quad \text{и} \quad 5x-3y-2=0.$$

Пример 06. Найти аффинное преобразование плоскости, при котором:

1) каждая из прямых $x-2y-3=0$ и $-x+y+1=0$ инвариантна,

2) точка $M=\left\|\begin{matrix}4\\-5\end{matrix}\right\|$ имеет своим образом точку $M^*=\left\|\begin{matrix}-39\\-32\end{matrix}\right\|$.

Решение:

1). Перейдем в *новую* систему координат, в которой *началом* O' служит точка пересечения данных прямых, а *новыми базисными векторами* являются направляющие векторы этих же прямых.

Координаты O' − точки пересечения прямых, определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_0-2y_0=\ \ 3, \\ -x_0+\ y_0=-1. \end{cases}$$

Откуда $x_0=-1$ и $y_0=-2$. Это означает, что $\left\|\vec{OO'}\right\|=\left\|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right\|$.

В качестве направляющих векторов прямых очевидно можно взять $\left\|\vec{g}'_1\right\|=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{g}'_2\right\|=\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|$. Тогда, согласно *теореме о формулах перехода*, получим, что выражение *старых* координат через *новые* имеет вид: $\begin{cases} x=2x'+y'-1, \\ y=\ x'+y'-2. \end{cases}$ Откуда находим и формулы *обратного* перехода: $\begin{cases} x'=\ \ x\ \ -y-1, \\ y'=-x+2y+3. \end{cases}$

2). Исходя из условия задачи, можно утверждать, что при искомом аффинном преобразовании:

1) Точка O' будет неподвижной,
2) а координатными осями новой системы координат будут инвариантные прямые.

Тогда в новой системе координат формулы искомого аффинного преобразования будут иметь следующий, очень простой вид: $\begin{cases} x^*{}' = \lambda\, x', \\ y^*{}' = \mu\, y', \end{cases}$ где λ и μ − некоторые константы.

3). Значения λ и μ найдем из условия $M \to M^*$, указаного в условии в задачи. Действительно, использовав формулы *обратного* перехода, мы получим, что в новой системе координат $M(8;-11)$, а $M^*(-8;-22)$, Откуда очевидно, что $\lambda = -1$ и $\mu = 2$.

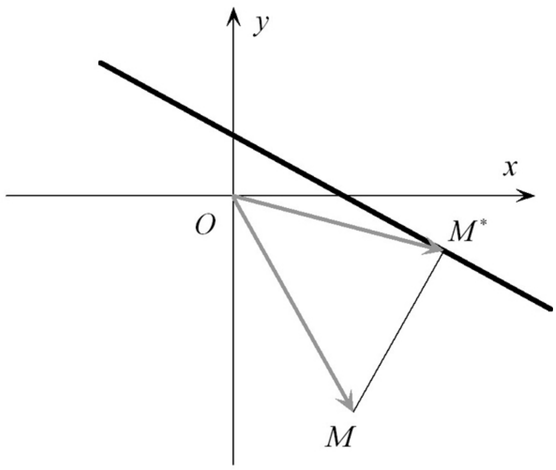
4). Наконец, подставив в равенства $\begin{cases} x^{*}{}' = -x', \\ y^{*}{}' = 2\,y', \end{cases}$ формулы *обратного* перехода, получим уравнения связи между координатами образа и прообраза в *исходной системе координат* (то есть, формулы, задающие искомое аффинное преобразование):

$$\begin{cases} x^{*} = -4x + 6y + 7, \\ y^{*} = -3x + 5y + 5. \end{cases}$$

Пример 07. В ортонормированной системе координат найти матрицу оператора, ортогонально проектирующего радиусы-векторы точек координатной плоскости на прямую $x+3y-2=0$.

Решение:

1). .Пусть точка-прообраз M имеет радиус-вектор $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, а точка M^* – образ точки M – соответственно ее радиус-вектор $\vec{r}_0^{\,*} = \begin{Vmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{Vmatrix}$.



Из рисунка следует, что M^* есть точка пересечения прямой $x+3y-2=0$ и перпендикуляра к ней, проходящего через M .

2) Поскольку нормальный вектор прямой $x+3y-2=0$ является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего будет иметь вид

$$\left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right\| + \tau \left\|\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right\| .$$

Откуда следует, что координаты радиуса-вектора точки M^* будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \tau, \\ y_0^* = y_0 + 3\tau, \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x_0^* = \dfrac{9}{10}x_0 - \dfrac{3}{10}y_0 + \dfrac{1}{5}, \\ y_0^* = -\dfrac{3}{10}x_0 + \dfrac{1}{10}y_0 + \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

3) Используя правила операций с матрицами, получаем окончательно, что

$$\left\| \begin{matrix} x_0^* \\ y_0^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix} \right\|,$$

то есть

$$\| \hat{A} \|_e = \left\| \begin{matrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{matrix} \right\| .$$

Отметим, что оператор ортогонально проектирования точек плоскости на фиксированную прямую линейный, но не аффинный, поскольку между образами и прообразами взаимной однозначности нет. Поэтому и $\det \| \hat{A} \|_e = 0$.