Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Определение Будем говорить, что задан *оператор* $\hat{A}$, *действующий на множестве* Ω *со значениями в множестве* Θ, если указано правило, по которому каждому элементу множества Ω поставлен в соответствие единственный элемент из множества Θ.

Символически результат действия оператора $\hat{A}$ обозначается так: $y = \hat{A}x, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Theta$. Элемент y в этом случае называется *образом элемента* x, элемент x называется *прообразом элемента* y.

Определение Если Θ – *область значений* некоторого оператора – является числовым множеством, то говорят, что на множестве Ω задан *функционал*.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например, $y = \Phi(x), x \in \Omega$.

Определение *Оператором* $\hat{A}$, *отображающим плоскость* (или просто *отображением плоскости*) P *на плоскость* Q, называется правило, по которому каждой точке плоскости P поставлена в соответствие единственная точка плоскости Q.

Отображение плоскости принято обозначать следующим образом: $\hat{A} : P \to Q$.

Определение Отображение $\hat{A} : P \to Q$ называется *взаимно однозначным*, если каждая точка плоскости Q имеет прообраз и притом единственный.

Отображение $\hat{A}$ плоскости P в саму себя называется *преобразованием* плоскости P.

Определение Последовательное выполнение преобразований

$$M^* = \hat{A} M \quad \text{и} \quad M^{**} = \hat{B} M^*$$

называется *произведением* (*или композицией*) этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде $M^{**} = \hat{B}\hat{A}\ M$. Заметим, что в общем случае это произведение *не коммутат*ивно, но *ассоциативно* и *дистрибутивно*.

\

Определение Преобразованием, *обратным* взаимно однозначному преобразованию $\hat{A} : P \to P$, называется оператор $\hat{A}^{-1} : P \to P$, такой, что для каждой точки M плоскости P имеет место

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A} M) = \hat{A}(\hat{A}^{-1} M) = M .$$

Определение

Точка плоскости P, переводимая преобразованием $\hat{A}$ сама в себя, называется *неподвижной точкой для* $\hat{A}$. Множество на P, состоящее из неподвижных точек для $\hat{A}$, называется *неподвижным для* $\hat{A}$.

Множество точек P, переходящее при $\hat{A}$ само в себя, называется *инвариантным множеством преобразования* $\hat{A}$.

Например, у неподвижной прямой каждая точка является неподвижной. В то время, как у инвариантной прямой образ точки не обязательно совпадает с прообразом, но он принадлежит этой прямой.

Линейные операторы на плоскости

Пусть на плоскости с декартовой системой координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ каждой ее точке M поставлена в однозначное соответствие точка M^*.

И пусть координатные представления радиусов-векторов этих точек суть $\left\|\vec{r}_M\right\|_g=\left\|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{r}_{M^*}\right\|_g=\left\|\begin{matrix}x^*\\y^*\end{matrix}\right\|$, тогда координаты x^* и y^* будут некоторыми функциями от x и y

$$\begin{cases}x^*=F_x(x,y)\\y^*=F_y(x,y)\end{cases},$$

тогда равенство $\left\|\begin{matrix}x^*\\y^*\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}F_x(x,y)\\F_y(x,y)\end{matrix}\right\|$ можно рассматривать как представление оператора $\vec{r}_{M^*}=\hat{A}\vec{r}_M$ в системе координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$.

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений виды функций $F_x(x,y)$ и $F_y(x,y)$.

Определение

Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ он задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$$

При помощи операций с матрицами линейный оператор может быть записан в виде $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \|\hat{A}\|_g \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, где матрица

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ (*координатным представлением* $\hat{A}$) в $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$.

Определение

Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1 и, кроме того, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
Если же $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, то оператор $\hat{A}$ называется *неоднородным*.

Пример К линейным однородным операторам относятся:

- оператор $\hat{A}$, действие которого сводится к умножению координат радиуса-вектора прообраза на фиксированные положительные числа, называемый "*оператором сжатия к осям*", или просто "*сжатием к осям*", имеющий матрицу $\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\|$, где числа κ_1 и κ_2 – *коэффициенты сжатия*;

- оператор *ортогонального проектирования* радиусов-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат;

- *гомотетия* с коэффициентом κ и с центром в начале координат.

Теорема **Для линейного однородного оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения:**

1°. $\hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 .$

2°. $\hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A}\vec{r} \quad \forall \vec{r}, \lambda .$

Из этих теорем вытекает важное следствие.

Следствие **Столбцами матрицы линейного однородного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ являются координатные представления векторов $\hat{A}\vec{g}_1$ и $\hat{A}\vec{g}_2$.**

Каждому линейному однородному оператору преобразования плоскости в конкретном базисе соответствует однозначно определяемая квадратная матрица второго порядка, а каждая квадратная матрица второго порядка задает в этом базисе некоторый линейный однородный оператор.

Проверим первое утверждение.

Очевидно, что в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ координатные представления (координатные столбцы) самих базисных векторов имеют вид $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Тогда из формул $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y, \end{cases}$ описывающих действие линейного однородного оператора $\hat{A}$, следует, что образы базисных элементов $\{\vec{g}^*_1, \vec{g}^*_2\}$ будут иметь координатные представления $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{Vmatrix}$, которые и являются столбцами матрицы $\| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$.

Отметим также, что, если пару векторов $\{\vec{g}^*_1, \vec{g}^*_2\}$ (в случае их линейной независимости) принять за новый базис на плоскости, то матрица перехода от исходного базиса к новому, в силу ее определения, будет совпадать с матрицей преобразования $\hat{A}$, то есть, будет верным равенство

$$\| S \| = \| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}.$$

Задача *Исходя из правил действия с матрицами, показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1°. *Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей*: $\| \hat{A}\hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g \| \hat{B} \|_g$.

2°. *Если* $\hat{A}^{-1}$ *есть оператор, обратный линейному однородному оператору* $\hat{A}$*, то*

$$\| \hat{A}^{-1} \|_g = \| \hat{A} \|_g^{-1} .$$

Выясним теперь, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

Теорема **Пусть в системе координат** $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ **некоторый однородный линейный оператор (преобразование) имеет матрицу** $\|\hat{A}\|_g$**. Тогда в системе координат** $\{O, \vec{g}_1', \vec{g}_2'\}$ **этот оператор будет иметь матрицу**

$$\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| ,$$

где $\|S\|$ **– матрица перехода**.

Следствие **Величина** $\det\| \hat{A} \|_g$ **не зависит от выбора базиса.**

Аффинные преобразования и их свойства

Линейные операторы, преобразующие плоскость саму в себя (то есть линейные операторы вида $\hat{A}: P \to P$) и *имеющие обратный оператор*, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

Определение Линейный оператор

$$\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| = \| \hat{A} \|_g \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|,$$

отображающий плоскость P саму на себя, с матрицей $\| \hat{A} \|_g = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$, для которой в любом базисе $\det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| \neq 0$, называется *аффинным преобразованием плоскости.*

Теорема (признак аффинности). **Если для линейного преобразования плоскости $\det\|\hat{A}\|_g \neq 0$ в некоторой декартовой системе координат, то это условие будет выполнено и в любой другой декартовой системе координат.**

Теорема **Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное, которое также является аффинным.**

Теорема **При аффинном преобразовании всякий базис переходит в базис, а для любых двух базисов существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй**.

Теорема **При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая**.

Теорема **При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, общая точка пересекающихся прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.**

Теорема **При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.**

Теорема **При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин их прообразов.**

Теорема **При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной**.

Будет справедлива

Теорема

1°. При аффинном преобразовании величины S^* – площади образа параллелограмма и S – площади прообраза параллелограмма связаны соотношением

$$S^* = \left| \det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \right| \cdot S .$$

2°. При аффинном преобразовании ориентация образов пары неколлинеарных векторов совпадает с ориентацией прообразов, если

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} > 0 ,$$

и меняется на противоположную, если

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} < 0 .$$

Теорема **Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы о канонической классификации:**

- **при аффинном преобразовании ее тип и вид не может измениться;**

- **найдется аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа и вида.**

Теорема **Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.**

Ортогональные преобразования плоскости

Определение

Ортогональным преобразованием плоскости P называется линейный оператор $\hat{Q}$ вида

$$\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix},$$

матрица которого $\|\hat{Q}\|_e = \begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{Vmatrix}$ ортогональная в любой *ортонормированной* системе координат.

Теорема

В ортонормированной системе координат ортогональное преобразование плоскости сохраняет:

1) **скалярное произведение векторов;**
2) **длины векторов и расстояния между точками плоскости;**
3) **углы между прямыми.**

Теорема

Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.