Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть в пространстве дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

Определение. Поверхность S является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат может иметь вид

$$\begin{aligned}&A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+\\&+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz+\\&+2A_{14}x+2A_{24}y+2A_{34}z+A_{44}=0,\end{aligned}$$

где числа $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13}, A_{23}$ *не равны нулю одновременно*, а x, y и z суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей S .

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения поверхности зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой уравнение поверхности оказывается наиболее простым.

Теорема **Для каждой поверхности второго порядка существует ортонормированная система координат $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих семнадцати канонических видов:**

Пустые множества	*Точки, прямые и плоскости*	*Цилиндрические и конические поверхности*
	Изолированная точка	*Эллиптический цилиндр*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=-1$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=0$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\ \forall z'$
	Прямая	*Гиперболический цилиндр*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1\ \forall z'$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0\ \forall z'$	$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1\ \forall z'$
	Пара пересекающихся плоскостей	*Параболический цилиндр*
$x'^2=-a^2\ \forall\, y', z'$	$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0\ \forall z'$	$y'^2=2px'\ \forall z'$
	Пара параллельных или совпадающих плосксте́й	*Коническая поверхность*
	$x'^2=a^2\ \forall\, y', z'$ $x'^2=0\ \ \forall\, y', z'$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0$

Невырожденные поверхности		
Эллипсоиды	*Параболоиды*	*Гиперболоиды*
Эллипсоид $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$	*Эллиптический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'$ *Гиперболический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2z'$	*Однополостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$ *Двуполостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$

причем $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$.

Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка

Прямолинейные образующие очевидно имеются у конусов, цилиндров, плоскостей и прямых. Кроме того, они есть у гиперболических параболоидов и однополостных гиперболоидов.

1) Если записать уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z\ ,$$

то можно прийти к заключению, что при любых значениях параметра α точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\alpha, \\ \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\alpha, \\ \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z, \end{cases}$$

также принадлежат и гиперболическому параболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение гиперболического параболоида.

Заметим, что для каждой точки гиперболического параболоида, существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на гиперболическом параболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора конкретных значений параметра α.

2). Однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Записав уравнение данной поверхности в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y^2}{b^2}\ ,$$

можно прийти к заключению, что при любых *не равных нулю одновременно* α и β, точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{cases}$$

будут принадлежать и однополостному гиперболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение однополостного гиперболоида.

То есть для каждой точки однополостного гиперболоида существует *пара прямых,* проходящих через эту точку и целиком лежащих на однополостном гиперболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены путем подбора конкретных значений α и β.

Пример 01. Найти прямолинейные образующие поверхности $\frac{x^2}{9} - y^2 = 2z$, проходящие через точку $(-3, 1, 0)$.

Решение: 1) Представим уравнение гиперболического параболоида в виде $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x}{3} + y\right) = 2z$, который является следствием каждой из двух следующих, задающих прямые, систем

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + y = 2\alpha, \\ \alpha\left(\frac{x}{3} - y\right) = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} - y = 2\alpha, \\ \alpha\left(\frac{x}{3} + y\right) = z. \end{cases}$$

2) Для первого семейства прямых условие прохождения через точку $(-3, 1, 0)$ имеет вид $\alpha = 0$. Тогда искомая прямая будет

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -3\tau, \\ y = \tau, \\ z = 0. \end{cases}$$

3) Для второго семейства прямых условие прохождения через точку $(-3, 1, 0)$ записывается аналогично: $\alpha = -1$. Искомая прямая в этом случае есть

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + y + z = 0, \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -6 + 3\tau, \\ y = \tau, \\ z = 2 - 2\tau. \end{cases}$$

Построение поверхностей

Вывод уравнений поверхностей может выполняться путем использования их геометрических свойств. Например коническая поверхность задается при помощи гомотетии относительно ее вершины.

Проиллюстрируем это для случая цилиндрической поверхности.

Пример 02. Найти уравнение цилиндра, описанного вокруг двух следующих сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ и $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 36$.

Решение: 1) Очевидно, что осью искомого цилиндра является прямая, проходящая через $\vec{r}_0$ - начало координат, с направляющим вектором $\| \vec{a} \| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right\|$ (вектором, между центрами сфер).

2) Пусть $\vec{\rho}$ произвольная точка на поверхности искомого цилиндра с $\| \vec{\rho} \| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$.

Поскольку расстояние от любой точки цилиндрической поверхности до ее оси есть постоянная величина R, то (согласно известной формуле для расстояния от точки $\vec{\rho}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$)

$$R = \frac{\left| [\vec{\rho} - \vec{r}_0, \vec{a}] \right|}{\left| \vec{a} \right|} \qquad \Rightarrow \qquad R^2 \left| \vec{a} \right|^2 = \left| [\vec{\rho} - \vec{r}_0, \vec{a}] \right|^2 .$$

3) В нашем случае имеем: $R = 6$ и $\left|\vec{a}\right|^2 = 6$, а

$$\left|[\vec{\rho} - \bar{r}_0, \vec{a}]\right| = \left|\det\begin{Vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left|[\vec{\rho} - \bar{r}_0, \vec{a}]\right|^2 = (2y+z)^2 + (2x-z)^2 + (x+y)^2.$$

Откуда получаем искомое уравнение поверхности

$$(2y+z)^2 + (2x-z)^2 + (x+y)^2 = 216.$$

4) Внешне это уравнение мало похоже на каноническое уравнение цилиндра, скорее это уравнение эллипсоида, так как при замене $\begin{cases} x' = 2y + z, \\ y' = 2x - z, \\ z' = x + y \end{cases}$ мы получаем $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 216.$

Однако, заметим, что данные формулы не являются формулами *замены координат* (т.е. формулами *перехода*) поскольку для матрицы такой замены $\det\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = 0$ и она не может являться матрицей перехода!

В нашем случае левая часть полученного уравнения в силу равенства $2z' = x' + y'$ может быть представлена как

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 = 432 \qquad \forall z',$$

что (покажите это самостоятельно) есть уравнение прямой, круговой цилиндрической поверхности.

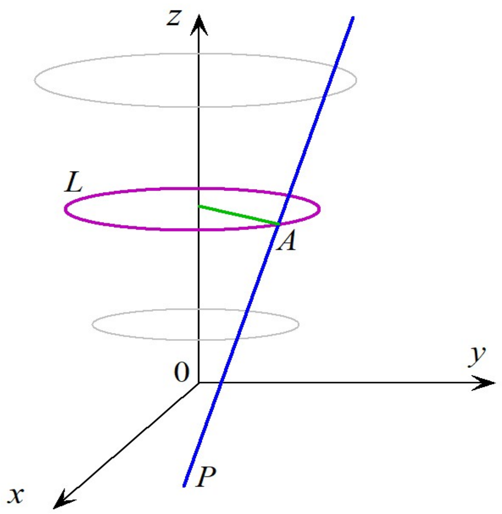
Поверхности вращения

Определение Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

называется *поверхностью вращения* вокруг оси Oz .

Вращение линий второго порядка вокруг некоторой оси не всегда является поверхностью *второго* порядка. Например, вращение линии $(x-1)^2+y^2=1$ вокруг оси Ox дает *эллипсоид*, а вращение вокруг оси Oy - *тор*.



Пример 03. Найти уравнение поверхности, получаемой при вращении прямой $\begin{cases} x=2\tau, \\ y=4, \\ z=\tau \end{cases}$ вокруг оси Oz и определить ее тип.

Решение: 1) Данная прямая P и ось вращения Oz образуют пару *скрещивающихся* прямых. Выберем A − некоторую точку на искомой поверхности вращения с координатами $\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$.

Эта точка принадлежит окружности L, поэтому согласно теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = R^2(z)\,,$$

где $R(z)$ - радиус окружности L.

2) С другой стороны, точка A принадлежит данной прямой P. Значит, для ее координат $\begin{cases} x = 2z \\ y = 4 \end{cases}$. Откуда получаем, что $R^2(z) = 16 + 4z^2$.

Следовательно, искомое уравнение будет иметь вид $x^2 + y^2 = 16 + 4z^2$ или

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Значит, искомая поверхность вращения является *однополостным гиперболоидом*.