Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Определение Линия L называется *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где числа A, B и C не равны нулю одновременно, а x и y суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей L.

Поскольку коэффициенты этого уравнения зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно попытаться найти другую ортонормированную систему координат $\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, в которой запись уравнения линии оказывается *более простой*.

Решение этой проблемы дает

Теорема **Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии (при $a \geq b > 0,\ p > 0$) имеет один из следующих девяти (называемых *каноническими*) видов:**

Таблица 1

Тип линии / ***Вид линии***	*Эллиптический* $\Delta > 0$	*Гиперболический* $\Delta < 0$	*Параболический* $\Delta = 0$
Пустые множества	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$
Изолированные точки	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
Совпадающие прямые			$y'^2 = 0 \quad \forall x'$
Несовпадающие прямые		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \quad \forall x'$
Кривые	*Эллипс* $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Парабола* $y'^2 = 2px'$

где $\Delta = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = AC - B^2.$

Уравнения *касательных* к эллипсу, гиперболе и параболе, проходящих через точку (x_0, y_0), принадлежащую линии, в канонической системе координат, соответствено имеют вид

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1, \qquad \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad \text{и} \qquad yy_0 = p(x+x_0)\,.$$

Следующие задачи иллюстрируют методы исследования свойств линий второго порядка.

Пример 01. На эллипсе $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ найти все точки, для которых касательная параллельна прямой $x-2y+4=0$.

Решение: 1) Уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку на эллипсе с координатами x_0 и y_0, имеет вид: $\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{8}=1$.

2) Условие параллельности или совпадения на плоскости двух прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

имеет вид: $\exists\lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$. В данной задаче это условие дает соотношения

$$\frac{x_0}{32} = \lambda \cdot 1 \quad \text{и} \quad \frac{y_0}{8} = \lambda \cdot (-2) \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 32\lambda \quad \text{и} \quad y_0 = -16\lambda \ .$$

3) Точка с координатами x_0 и y_0 принадлежит эллипсу, поэтому

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(32\lambda)^2}{32} + \frac{(-16\lambda)^2}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad 64\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{8} \ .$$

Откуда получаем две точки: (4, -2) и (-4, 2), являющиеся решением задачи.

Пример 02. На гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ найти все точки, расстояние от которых до одной из асимптот равно утроенному расстоянию до другой.

Решение: 1) Уравнения асимптот этой гиперболы будут $y = \pm\frac{x}{2}$.

2) Напомним, что расстояние от точки с координатами x_0 и y_0 до прямой вида $Ax + By + C = 0$, в ортонормированной системе координат дается формулой

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ .$$

Следовательно, расстояния соответственно до первой и второй асимптот в нашей задаче будут

$$L_1 = \frac{\left| -\dfrac{x_0}{2} + y_0 \right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|-x_0+2y_0|}{\sqrt{5}} \qquad \text{и} \qquad L_2 = \frac{\left| \dfrac{x_0}{2} + y_0 \right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку в условии не указано, к какой из асимптот точка находится ближе, то придется рассмотреть два случая: $L_1 = 3L_2$ и $3L_1 = L_2$.

3) Рассмотрим первый случай. Поскольку точка с координатами x_0 и y_0 принадлежит гиперболе, то необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} |-x_0+2y_0| = 3|x_0+2y_0|, \\ \dfrac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1. \end{cases}$$

Раскрытие символов абсолютной величины приводит к двум вариантам:

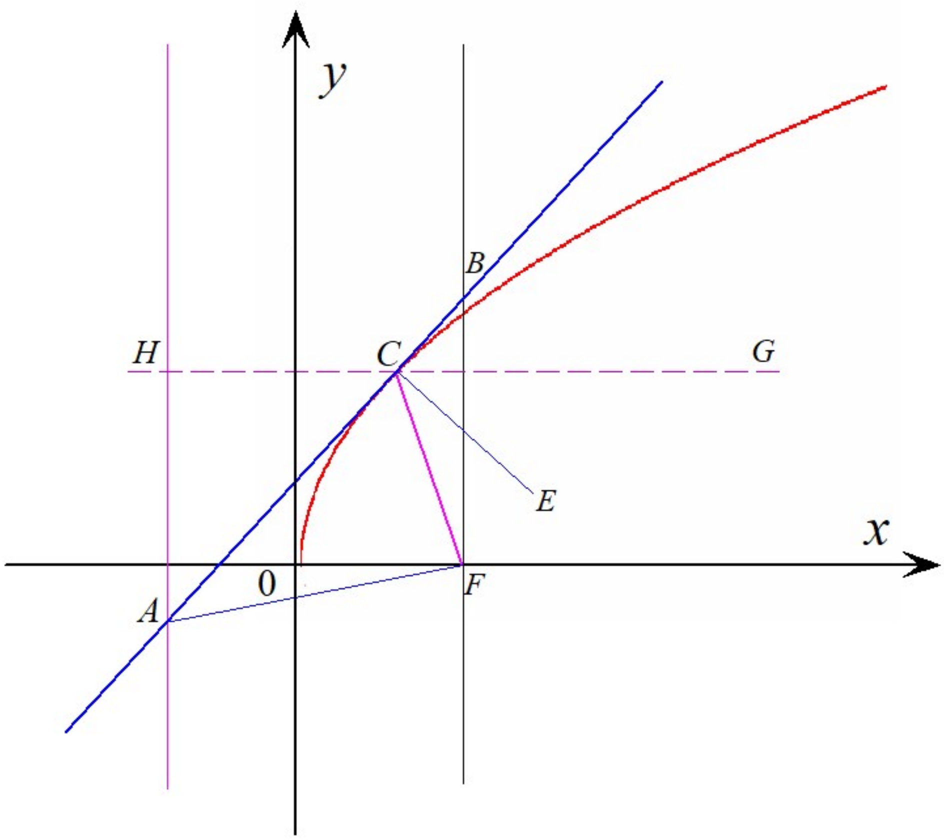
$$\begin{cases} -x_0+2y_0 = 3(x_0+2y_0), \\ \dfrac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0-2y_0 = 3(x_0+2y_0), \\ \dfrac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1 \end{cases}$$

В первом варианте из первого уравнения имеем $-x_0 = y_0$, что, в силу второго уравнения, дает $-\dfrac{3y_0^2}{4} = 1$, то есть, здесь решений нет.

Во втором же варианте из первого уравнения получаем $x_0 = -4y_0$. Тогда из второго уравнения имеем $3y_0^2 = 1$, или $y_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Это дает два решения задачи $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4) Рассуждения в случае $3L_1 = L_2$ аналогичны. Они дают два решения задачи $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, которые также могут быть получены из первой пары решений и симметричности ветвей гиперболы относительно канонических координатных осей.

Пример 03. *Выяснить, верно ли утверждение*: касательная к параболе пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную оси параболы, в точках равноудаленных от фокуса. *Ответ обосновать*.



Пояснения к рисунку:

красная линия − парабола,
синяя прямая − касательная,
прямая AH − директриса,
прямая FB − фокальная хорда,
C − точка касания параболы,
A − точка пересечения касательной и директрисы,
B − точка пересечения касательной и фокальной хорды,
прямая HG параллельна оси $0x$,
\ прямая CE перпендикулярна касательной.

Приведем два варианта доказательства справедливости данного утверждения: стандартное геометрическое (при помощи чертежа) и аналитическое, не использующее наглядных образов.

Геометрическое доказательство

Углы GCE и ECF равны по оптическому свойству параболы и равны α.

Углы ECF и CBF равны α как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Углы DAC и CBF равны α как накрестлежащие при параллельных прямых.

Углы ACF и BCG равны $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Угол HCA также равен $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Тогда в силу $HC = CF$ (поскольку для параболы эксцентриситет равен 1) треугольники AHC и ACF равные, значит равны α углы DAC и CAF.

Но тогда равны α углы CAF и CBF, то есть треугольник ABF равнобедренный и $AF = BF$.

Аналитическое доказательство

Пусть точка касания, имеет координаты x_0 и y_0. Тогда мы имеем, что $y_0^2 = 2px_0$, а уравнение касательной будет $y_0 y = p(x + x_0)$. Кроме того, учтем, что уравнение директрисы есть $x = -\frac{p}{2}$, а уравнение фокальной хорды $x = \frac{p}{2}$. Также заметим, что FB равно модулю ординаты точки B, а FA есть расстояние между точками F и A.

Точка фокуса F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Тогда координаты точки B определяются так:

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{p}{2} \\ y_0 y_B = p(x_B + x_0) \end{cases} \Rightarrow \quad y_B = \frac{p}{y_0}\left(\frac{p}{2} + x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y_B = \frac{p^2 + px_0}{2y_0}.$$

С другой стороны, координаты точки A находятся из системы

$$\begin{cases} x_A = -\dfrac{p}{2} \\ y_0 y_A = p(x_A + x_0) \end{cases} \Rightarrow \quad y_A = \frac{p}{y_0}\left(-\frac{p}{2} + x_0\right) \quad \Rightarrow \quad y_A = \frac{-p^2 + 2px_0}{2y_0}.$$

Поскольку система координат ортонормированная, то с учетом $y_0^2 = 2px_0$ получаем

$$FA = \sqrt{\left(x_A - \frac{p}{2}\right)^2 + y_A^2} = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p^2 + 2px_0}{2y_0}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4p^2y_0^2 + p^4 - 4p^3x_0 + 4p^2x_0^2}{4y_0^2}} = \sqrt{\frac{8p^3x_0 + p^4 - 4p^3x_0 + p^2x_0^2}{4y_0^2}} = \left|\frac{p^2 + px_0}{2y_0}\right| = FB.$$

Практическая классификация линий второго порядка

I. Анализ упрощается, если уравнение линии второго порядка имеет специальный вид.

Пример 04. Выяснить тип линии второго порядка (не приводя ее уравнение к каноническому виду) $(x-4y+3)^2+(2x+3y-1)=0.$

Решение. Обозначим $\begin{cases} x' = x-4y+3, \\ y' = 2x+3y-1, \end{cases}$. тогда получим $x'^2+y'=0$. При этом будет $\det\begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}=11\neq 0,$ значит, эти соотношения могут быть *формулами перехода*. Поскольку при замене системы координат аффинная классификация линий сохраняется, то линия в условии - парабола.

Общий случай линии второго порядка.

Пусть $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

1) Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать выполненными условия: $B \geq 0$ и $A \geq C$. Действительно, если $B < 0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении линии.

Если же $A < C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2$; $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1$; $\overrightarrow{OO'} = \vec{o}$, мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства $x = y'; y = x'$ по правилам построения формул перехода. Заметим также, что при этой замене Δ не меняется, поскольку

$$\det\begin{Vmatrix} C & B \\ B & A \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = \Delta .$$

2) Поворот вокруг начала координат $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases}$ приводящий к тому, что слагаемое $2Bxy$ исчезает ($B' = 0$), выполняется при условии:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \; ; \; \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A - C} \text{ или, равносильному ему,}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{A - C}{B}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0, \; B \neq 0,$$

Это дает $A' = \dfrac{A + C}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}$ и $C' = \dfrac{A + C}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}$.

Пример 05: В прямоугольной системе координат построить линию второго порядка

$$3x^2+12xy+12y^2-2x+46y+67=0\ .$$

Решение:

1°. Поскольку $B\ge 0$, но $A\le C$, то делаем замену переменных: $\begin{cases} x=y', \\ y=x'. \end{cases}$ **(A)**

Получим уравнение $12x'^2+12x'y'+3y'^2+46x'-2y'+67=0$.

2°. Делаем поворот системы координат на угол α против часовой стрелки. Причем $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}.$

Формулы этой замены $\begin{cases} x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha, \\ y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha. \end{cases}$

Величину α находим из условия: . $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2B}{A - C} = \dfrac{2 \cdot 6}{12 - 3} = \dfrac{4}{3}$.

Используя формулы: $\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha + 1$ и $\begin{matrix} 1 + \cos 2\phi = 2\cos^2 \phi \\ 1 - \cos 2\phi = 2\sin^2 \phi \end{matrix}$,

находим, что $\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\begin{matrix} \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{matrix}$. То есть, $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x'' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} y'', \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y''. \end{cases}$ **(B)**

Поскольку

$$A'' = \frac{A'+C'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A'-C')^2} = \frac{12+3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 6^2 + (12-3)^2} = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{144+81}}{2} = 15$$

и $C'' = \dfrac{A'+C'}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A'-C')^2} = 0$,

то мы приходим к уравнению вида:

$$15x''^2 + \frac{90}{\sqrt{5}}x'' - \frac{50}{\sqrt{5}}y'' + 67 = 0 \quad \text{или} \quad x''^2 + 2\frac{3}{\sqrt{5}}x'' - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{67}{15} = 0\,.$$

3^o. Выделяем полный квадрат: $x''^2 + 2\frac{3}{\sqrt{5}}x'' + \frac{9}{5} - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{67}{15} - \frac{9}{5} = 0$ или

$\left(x'' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{8}{3} = 0$. Откуда получаем:

$$\left(x'' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2\frac{\sqrt{5}}{3}\left(y'' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Каноническую форму уравнения нашей линии получим, переименовав оси и сдвинув начало координат, то есть, при замене: . $\begin{cases} x'' = y''' - \frac{3}{\sqrt{5}}, \\ y'' = x''' + \frac{4}{\sqrt{5}}. \end{cases}$ **(C)**

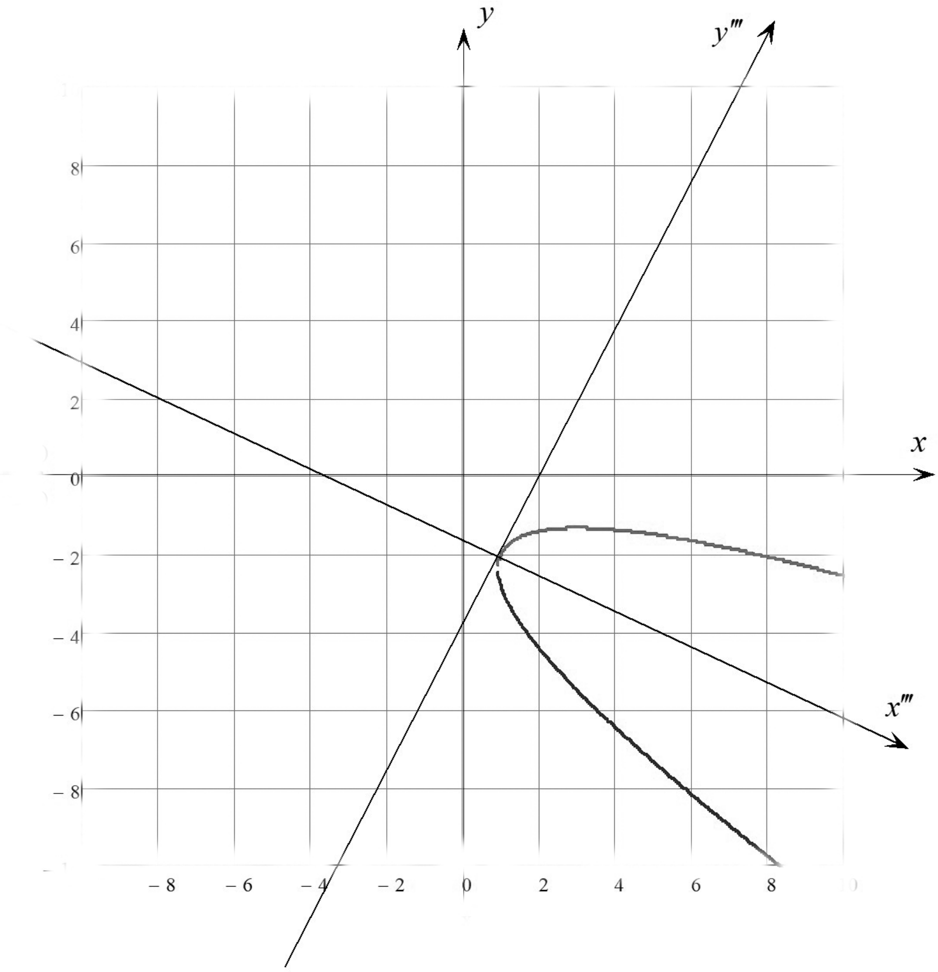
Эта форма будет иметь вид $y'''^2 = 2px'''$, то есть это парабола, у которой фокальный параметр $p = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4°. Найдем итоговые формулы перехода, подставив **(C)** в **(B)** , а результат этой подстановки подставим в **(A)**. Окончательно получим

$$\begin{cases} x = \quad \dfrac{2}{\sqrt{5}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y''' + 1, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x''' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y''' - 2\,. \end{cases}$$

Это означает, что итоговая матрица перехода $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{matrix} \right\|$, а итоговое начало координат (вершина параболы) будет в точке $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$.

5°. Учитывая, что столбцы матрицы $\|S\|$ суть координатные столбцы базисных векторов $\vec{e}_1\,''', \vec{e}_2\,'''$, а вектор $\vec{e}_1\,'''$ есть направляющий вектор оси параболы, строим эскиз:



Графический вариант решения задачи получается удалением ('стиранием') с рисунка осей канонической системы координат $\{O'', x'', y''\}$.