ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Формы задания плоскости в пространстве

Пусть даны система координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ в пространстве и плоскость S, проходящая через точку $\vec{r}_0=\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, с лежащими на S неколлинеарными векторами $\vec{p}=\begin{Vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Vmatrix}$ и $\vec{q}=\begin{Vmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Vmatrix}$.

Векторы $\vec{p}=\begin{Vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Vmatrix}$ и $\vec{q}=\begin{Vmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Vmatrix}$ называются направляющими векторами для S. Тогда справедливо следующее утверждение:

- Множество радиусов-векторов точек плоскости S представимо в виде

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\,\vec{p}+\theta\,\vec{q}\,,}$$

где φ и θ − произвольные вещественные числа.

Поскольку данное уравнение равносильно условию компланарности векторов $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то его можно записать в виде

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{p},\vec{q}) = 0.}$$

Или в координатной форме $\det\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{Vmatrix} = 0$.

- Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$, $|A|+|B|+|C|>0$.
- Каждое уравнпение вида $Ax+By+Cz+D=0$, $|A|+|B|+|C|>0$ в любой декартовой системе координат задает некоторую плоскость.

Уравнение плоскости S, проходящей через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\|$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = \left\| \begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix} \right\|$, имеет вид

$$\boxed{(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad \text{или} \quad (\vec{n}, \vec{r}) = d, \quad \text{где } d = (\vec{n}, \vec{r}_0).}$$

Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости S.

- Если плоскость S задана в ортонормировапнной системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, $|A|+|B|+|C|>0$, то вектор $\vec{n}=\left\|\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\|$ ортогонален этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три, попарно несовпадающх, и не лежащих на одной прямой, точки $\vec{r}_1=\left\|\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\|$; $\vec{r}_2=\left\|\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\|$; $\vec{r}_3=\left\|\begin{matrix}x_3\\y_3\\z_3\end{matrix}\right\|$ имеет вид $(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0$.

Или же, в координатном представлении

$$\det\left\|\begin{matrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|=0..$$

Формы задания прямой в пространстве

Прямая L в пространстве, имеющая ненулевой направаляющий вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ и проходящая через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, задается уравнением вида

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}\,.}$$

Если параметр τ исключить из скалярной записи этого уравнения $\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases}$, то получается *каноническая* система вида

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.}$$

Прямая L в пространстве может быть задана как линия пересечения плоскостей вида $(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2$. Здесь $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ неколлинеарные нормальные векторы этих плоскостей, а d_1 и d_2 суть некоторые числа. Векторное описание прямой L будет

$$\boxed{\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}}$$

Если известен радиус-вектор $\vec{r}_0$ некоторой тогчки прямой L, то ее описание будет $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$ Координатная форма описания L в этих случаях будет

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r}-\vec{r}_0$ при задании прямой может быть записано как $[\vec{a},\vec{r}-\vec{r}_0]=\vec{o}$ или же

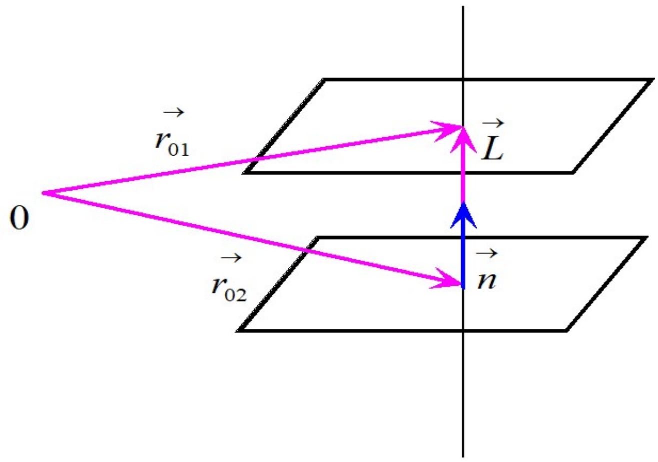
$$\boxed{[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}\,,}$$

где $\vec{b}=[\vec{a},\vec{r}_0]$.

В ортонормированной системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ данный способ описания прямой в пространстве имеет вид

$$\det\left\|\begin{matrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{matrix}\right\|=\vec{b} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases}a_y z-a_z y=b_x\,,\\ a_z x-a_x z=b_y\,,\\ a_x y-a_y x=b_z\,.\end{cases}$$

Отметим, что в последней системе только два уравнения из трех независимые.



Задача 6.1. *Найти расстояние между плоскостями* $(\vec{n},\vec{r}) = d_1$ и $(\vec{n},\vec{r}) = d_2$.

Решение: 1) Пусть $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ суть радиусы-векторы точек пересечения общего перпендикуляра с плоскостями. Тогда $\vec{L} = \vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}$ и $\vec{L} = \lambda\vec{n}$. Искомое расстояние очевидно равно $S = \left|\vec{L}\right|$.

2) Найдем λ из условия $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \lambda\vec{n}$, умножив обе части скалярно на $\vec{n}$, получим

$$(\vec{r}_{01},\vec{n}) - (\vec{r}_{02},\vec{n}) = \lambda(\vec{n},\vec{n}) \quad \Rightarrow \quad d_1 - d_2 = \lambda\left|\vec{n}\right|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d_1 - d_2}{\left|\vec{n}\right|^2}.$$

3) Откуда $S = \left|\vec{L}\right| = \left|\lambda\vec{n}\right| = |\lambda|\left|\vec{n}\right| = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\left|\vec{n}\right|}$

Решение получено

Задача 6.2. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $A(5,-4,3)$, *перпендикулярно прямой, проходящей через точки* $B(-1,-2,1)$ *и* $C(-6,-4,3)$. *Система координат прямоугольная.*

Решение: 1) Пусть точки A,B,C имеют радиусы-векторы соответственно $\vec{r}_0, \vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, произвольная точка плоскости имеет радиус-вектор $\vec{r}$.

2) Заметим, что векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ в данном случае ортогональны при любом $\vec{r}$. Поэтому искомое уравнение будет $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

3) Пусть вектор $\vec{r}$ имеет координаты $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $(-6+1)(x-5)+(-4+2)(y+4)+(3-1)(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad 5x+2y-2z=11$.

Решение получено

Задача 6.3. *Найти плоскость, проходящую через прямую* $\begin{cases} x = 1 - 5\tau \\ y = 2 - \tau \\ z = 1 + 4\tau \end{cases}$, *параллельно прямой* $\begin{cases} x = -3 + 3\tau \\ y = -2 - 5\tau \\ z = 2 - 4\tau \end{cases}$. *Система координат произвольная.*

Решение: 1) Пусть в векторной форме данные прямые имеют следующий параметрический вид

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau\,\vec{a}_1 \ \text{ и } \ \vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau\,\vec{a}_2 .$$

То есть, нам известна точка $\vec{r}_{01}$, через которую искомая плоскость гарантированно проходит, поскольку через эту точку проходит и первая прямая.

2) Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ колинеарны искомой плоскости по условию. Пусть вектор $\vec{r}$ произвольной точки этой плоскости имеет координаты $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$. Значит, тройка векторов $\vec{r}-\vec{r}_{01}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарна искомой плоскости, а ее уравнение можено записать в виде $(\vec{r}-\vec{r}_{01},\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2) = 0.$

3) В произвольной ДСК это уравнение будет

$$\det\begin{Vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \end{Vmatrix} \cdot (g_1, g_2, g_3) = 0,$$

где векторы базиса $\{\ \vec{g}_1;\ \vec{g}_2;\ \vec{g}_3\}$ линейно независимы и, следовательно, их смешанное произведение отлично от нуля. Тогда в любой ДСК уравнение искомой плоскости будет

$$\det\begin{Vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \end{Vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x-2y+7z=9.$$

Решение получено

Задача 6.4. *Найти точку пересечения прямой* $\begin{cases} x = -3 + 4\tau \\ y = 1 - 4\tau \\ z = -5 + \tau \end{cases}$ *и плоскости* $x + 4z = -7$. *Система координат произвольная.*

Решение: 1) Пусть в векторной форме данные прямая и плоскость имеют следующий вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\,\vec{a}$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d$. Обозначим искомую точку пересечения как $\vec{R}$, причем будем считать, что $\vec{R} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}$.

2) Поскольку $\vec{R}$ принадлежит, как прямой, так и плоскости, то значение параметра λ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} \\ (\vec{n}, \vec{R}) = d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\vec{n}, \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}) = d \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})}.$$

Откуда $\vec{R} = \vec{r}_0 + \dfrac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})}\,\vec{a}$.

3) Значения координат искомой точки $\vec{R} = \begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix}$ удобнее искать не при помощи полученной формулы, а непосредственно из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} X = -3 + 4\lambda, \\ Y = 1 - 4\lambda, \\ Z = -5 + \lambda, \\ X + 4Z + 7 = 0. \end{cases}$$

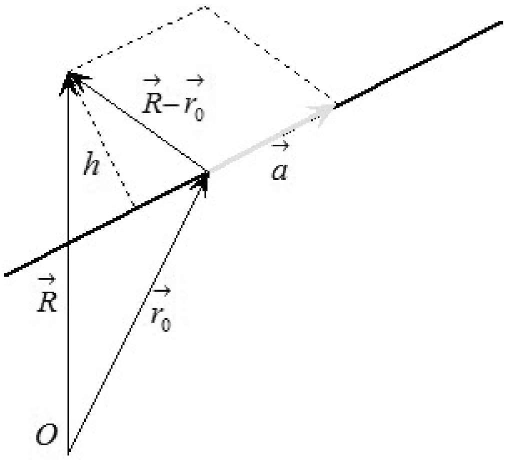
Если подставить X и Z из первого и третьего уравнений в четвертое, то сразу получается, что $\lambda = 2$ и, следовательно, $\vec{R} = \begin{Vmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{Vmatrix}$.

Решение получено

Задача 6.5 *Найти расстояние от точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой* $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$.

Решение: Расстояние h в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ можно найти, воспользовавшись свойством, что S – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. В итоге получаем

$$h = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} .$$

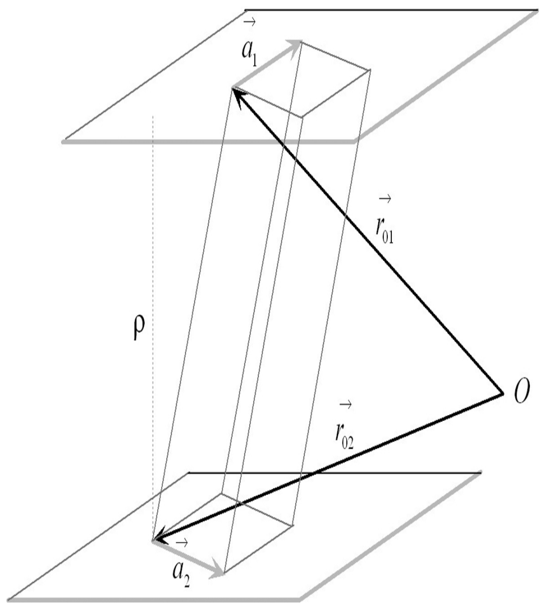


Решение получено

Задача 6.6 *Найти расстояние между прямыми* $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau\,\vec{a}_1$ *и* $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau\,\vec{a}_2$.

Решение: 1°. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, тогда решение аналогично решению примера 06.

2°. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны, тогда построим пару плоскостей, параллельных этим векторам, одна из которых содержит точку $\vec{r}_{01}$, а другая точку $\vec{r}_{02}$.



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$, равен, с одной стороны, произведению площади параллелограмма, находящегося в основании, на искомую величину ρ и $\left| (\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \right|$ – с другой. Откуда находим, что

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

Решение получено

Задача 6.7 *Даны плоскость* $(\vec{n},\vec{r}) = d$ *и прямая* $[\vec{a},\vec{r}] = \vec{b}$. *Найти* $\vec{R}$ *– радиус-вектор точки их пересечения, если* $(\vec{n},\vec{a}) \neq 0$.

Решение: 1°. Умножив обе части уравнения прямой векторно слева на $\vec{n}$, получим $[\vec{n},[\vec{a},\vec{r}]] = [\vec{n},\vec{b}]$. Подставляя в это соотношение искомый вектор $\vec{R}$ и применяя формулу "*bac-cab*" приходим к равенству

$$\vec{a}(\vec{n},\vec{R}) - \vec{R}(\vec{n},\vec{a}) = [\vec{n},\vec{b}]\,.$$

Поскольку точка $\vec{R}$ принадлежит данной плоскости, то верно равенство $(\vec{n},\vec{R}) = d$. Тогда, при ограничении $(\vec{n},\vec{a}) \neq 0$, получаем

$$\vec{R} = \frac{d\,\vec{a} - [\vec{n},\vec{b}]}{(\vec{n},\vec{a})}\,.$$

Решение получено