Произведения векторов

1°. Скалярное произведение

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае, если хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение *считается* равным нулю.

Скалярное произведение обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. По определению:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\varphi\,;\ 0 \le \varphi \le \pi\,,$$

где φ - угол между векторами-сомножителями. Если $\vec{b} \neq \vec{o}$, то, по определению, имеет место равенство $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\ \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения
\

1°. $(\vec{a},\vec{b})=0$ при $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*;

2°. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (коммутативность);

3°. $(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2,\vec{b})=\lambda_1(\vec{a}_1,\vec{b})+\lambda_2(\vec{a}_2,\vec{b})$ (линейность);

4°. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\geq 0\ \forall\vec{a};\quad |\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

(условия $(\vec{a},\vec{a})=0$ и $\vec{a}=\vec{o}$ равносильны);

5°. При $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ $\quad\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

2°. Векторное произведение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1°. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$; $0<\varphi<\pi$.

2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.

3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение *считается* равным нулевому вектору.

Векторное произведение обозначается как $[\vec{a},\vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

1°. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно *нулевому вектору*. .

3°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (*антикоммутативность*, следует из определения и нечетности функции $\sin\varphi$)

4°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$.

5°. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (*дистрибутивность*).

3°. Смешанное произведение

Смешанным (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, называется число $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Свойства смешанного произведения

1°. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Знак смешанного произведения положительный, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и отрицательный, если - левая.

2°. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

3°. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

4°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$,

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара равных.

4°. Двойное векторное произведение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a}[\vec{b}\ \vec{c}]]$.

Свойство двойного векторного произведения

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}),$$

Задача

Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*, если известно, что векторы* $\vec{a}+2\vec{b}$ *и* $5\vec{a}-4\vec{b}$ *ортогональны?*

Решение

Если векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ *и* $5\vec{a}-4\vec{b}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю. Поэтому, с учетом коммутативности скалярного произведения и условий $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$,

$$0=(\vec{a}+2\vec{b},5\vec{a}-4\vec{b})=5(\vec{a},\vec{a})-4(\vec{a},\vec{b})+10(\vec{b},\vec{a})-8(\vec{b},\vec{b})=$$
$$=5\left|\vec{a}\right|^2+6(\vec{a},\vec{b})-8\left|\vec{b}\right|^2=6(\vec{a},\vec{b})-3.$$

Откуда $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение получено.

Задача . *Показать, что векторное произведение пары векторов не изменится, если ко второму сомножителю прибавить вектор, коллинеарный первому.*

Решение

Пусть даны $[\vec{a},\vec{b}]$ и $\vec{c}=\vec{b}+\lambda\vec{a}$. Найдем $[\vec{a},\vec{c}]$.

$$[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}+\lambda\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b}]+\lambda[\vec{a},\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b}],$$

поскольку $[\vec{a},\vec{a}]=\vec{o}$.

Решение получено

Заметим, что одновремено нами показано, что, по векторному произведению и одному из его сомножителей однозначно указать второй сомножитель невозможно.

Задача

Найти, лежащий в плоскости векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*, вектор* $\vec{x}$*, если*

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{x}) = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{x}) = \beta, \end{cases}$$

а векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны.*

Решение

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис в своей плоскости. Поэтому вектор $\vec{x}$ можно (и притом единственным образом) разложить по этому базису

$$\vec{x} = \xi\vec{a} + \eta\vec{b} \quad .$$

Коэффициенты разложения найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{a})\xi + (\vec{a},\vec{b})\eta = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{a})\xi + (\vec{b},\vec{b})\eta = \beta. \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

Покажем, что эта система имеет невырожденную основную матрицу. Действительно, по определению скалярного произведения,

$$\det\begin{Vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{Vmatrix} = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi > 0,$$

где φ - угол между неколлинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тогда, по теореме Крамера, система (**A**) имеет решение и притом единственное для любой пары неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение получено.

Задача

Найти вектор $\vec{x}$, *если*

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{x}) = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{x}) = \beta, \\ (\vec{c},\vec{x}) = \gamma, \end{cases}$$

а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *некомпланарны.*

Решение

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ линейно независимые, поэтому линейно независимы и векторы $[\vec{a},\vec{b}]$, $[\vec{b},\vec{c}]$ и $[\vec{c},\vec{a}]$, которые образуют базис в пространстве. Поэтому вектор $\vec{x}$ можно (и притом единственным образом) разложить по этому базису $\vec{x} = \xi[\vec{a},\vec{b}] + \eta[\vec{b},\vec{c}] + \kappa[\vec{c},\vec{a}]$.

Коэффициенты разложения найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{a},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{a},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \alpha , \\ (\vec{b},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{b},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{b},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \beta , \\ (\vec{c},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{c},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{c},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \gamma , \end{cases}$$

которая по свойствам смешанного произведения равносильна системе

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{b},\vec{c},)\eta = \alpha , \\ (\vec{b},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \beta , \\ (\vec{c},\vec{a},\vec{b},)\xi = \gamma . \end{cases}$$

Решение получено.

Задача

Найти все векторы $\vec{x}$ *, удовлетворяющие соотношению*

$$[\vec{a},\vec{x}]+[\vec{x},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}],$$

Если $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***неколлинеарны.***

Решение

Умножим обе части данного уравнения скалярно на $\vec{b}$, получим

$$([\vec{a},\vec{x}],\vec{b})+([\vec{x},\vec{b}],\vec{b})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{b}) \text{ или } (\vec{a},\vec{x},\vec{b})+(\vec{x},\vec{b},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{b}).$$

Согласно свойствам смешанного произведения $(\vec{x},\vec{b},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{b})=0$, то есть $(\vec{a},\vec{x},\vec{b})=0$ и, значит, векторы $\vec{a},\vec{x}$ и $\vec{b}$ компланарны и линейно зависимы. В этом случае вектор $\vec{x}$ может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Найдем теперь при каких значениях α и β вектор $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ будет удовлетворять исходному уравнению.

.
Подставляя, получим

$$[\vec{a},\vec{x}]+[\vec{x},\vec{b}]=[\vec{a},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}]+[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{b}]=$$

$$=\alpha[\vec{a},\vec{a}]+\beta[\vec{a},\vec{b}]+\alpha[\vec{a},\vec{b}]+\beta[\vec{b},\vec{b}]=(\alpha+\beta)[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]\,,$$

то есть необходимо, чтобы $\alpha+\beta=1$. Поэтому решение исходного уравнения имеет вид $\vec{x}=\alpha\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}\,,\quad\forall\alpha$.

Решение получено

Задача .

Найти вектор $\vec{x}$ *из системы уравнений*

$$\begin{cases} [\vec{a},\vec{x}]=\vec{b}, \\ (\vec{c},\vec{x})=\alpha \end{cases}.$$

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *и число* α *считать известными.*

Решение

Умножив обе части первого уравнения векторно слева на $\vec{c}$ и применив формулу для двойного векторного произведения, получим

$$[\vec{c},[\vec{a},\vec{x}]]=\vec{a}(\vec{c},\vec{x})-\vec{x}(\vec{c},\vec{a})=[\vec{c},\vec{b}]$$

$$\alpha\,\vec{a}-\vec{x}(\vec{c},\vec{a})=[\vec{c},\vec{b}],$$

поскольку, в силу второго уравнения системы, $(\vec{c},\vec{x})=\alpha$.

Откуда окончательно получаем

$$\vec{x}=\frac{\alpha\,\vec{a}-[\vec{c},\vec{b}]}{(\vec{c},\vec{a})}\,,\quad (\vec{c},\vec{a})\neq 0\,.$$

Если же $(\vec{c},\vec{a})=0$, то при $\alpha\,\vec{a}\neq[\vec{c},\vec{b}]$ решений нет, а для случая $\begin{cases} (\vec{c},\vec{a})=0, \\ \alpha\,\vec{a}=[\vec{c},\vec{b}] \end{cases}$ решением будет являться любой вектор вида $\vec{x}=-\dfrac{[\vec{a},\vec{b}]}{\left|\vec{a}\right|^2}+\tau\,\vec{a}\,;\quad \forall\tau$

Решение получено.

Произведения векторов в координатах

Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть дан базис $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$ и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатными разложениями в этом базисе:

$$\vec{a} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3\,, \qquad \vec{b} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,.$$

Тогда по свойствам 3) и 4) скалярного произведения

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b}\,) = (\,\xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3,\ \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,) = \\
&= \xi_1\eta_1(\vec{g}_1,\vec{g}_1) + \xi_1\eta_2(\vec{g}_1,\vec{g}_2) + \xi_1\eta_3(\vec{g}_1,\vec{g}_3) + \\
&+ \xi_2\eta_1(\vec{g}_2,\vec{g}_1) + \xi_2\eta_2(\vec{g}_2,\vec{g}_2) + \xi_2\eta_3(\vec{g}_2,\vec{g}_3) + \\
&+ \xi_3\eta_1(\vec{g}_3,\vec{g}_1) + \xi_3\eta_2(\vec{g}_3,\vec{g}_2) + \xi_3\eta_3(\vec{g}_3,\vec{g}_3) = \\
&= \sum_{j=1}^{3}\Big(\xi_j\eta_1(\vec{g}_j,\vec{g}_1) + \xi_j\eta_2(\vec{g}_j,\vec{g}_2) + \xi_j\eta_3(\vec{g}_j,\vec{g}_3)\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\xi_j\eta_i(\vec{g}_j,\vec{g}_i)\,.\end{aligned}$$

В случае *ортонормированного* базиса эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство $(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$ где число δ_{ji} называется *символом Кронекера*.

Откуда для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}\,) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3\,,$$

из которой следуют соотношения: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a}\,)} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\,,$
а для случая $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b}\,)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}\,.$$

Отметим, что это равенство в сочетании с условием $|\cos\varphi| \leq 1$ приводит к верному $\forall \xi_i,\, \eta_j \quad i, j = 1 \ldots 3$ *неравенству Коши – Буняковского*:

$$\left|\,\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3\,\right| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}\,.$$

Задача 4.07 *Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны координаты этих точек.*

Решение. Пусть даны: ортонормированная система координат $\{\, O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и две точки M_1 и M_2, радиусы=векторы которых имеют координатные представления вида

$$\left\| \vec{OM_1} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad \left\| \vec{OM_2} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

Тогда, используя формулу для длины вектора

$$\vec{M_1M_2} = (\xi_1 - \eta_1)\vec{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\vec{e}_2 + (\xi_3 - \eta_3)\vec{e}_3 \,,$$

получим в ортонормированной системе координат

Решение получено.

$$\left| \vec{M_1M_2} \right| = \sqrt{\ (\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2\ } \ .$$

Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$ (то есть такой, что векторы $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$ образуют *правую* тройку) и пусть в этом базисе векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координатные разложения

$$\vec{a} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3 \qquad \text{и} \qquad \vec{b} = \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,.$$

По свойствам 2) и 3) векторного произведения

$$\begin{aligned}
[\vec{a},\vec{b}\,] = [\,\xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3,\ \eta_1\vec{g}_1 + \eta_2\vec{g}_2 + \eta_3\vec{g}_3\,] = \\
= \xi_1\eta_1[\vec{g}_1,\vec{g}_1] + \xi_1\eta_2[\vec{g}_1,\vec{g}_2] + \xi_1\eta_3[\vec{g}_1,\vec{g}_3] + \\
+ \xi_2\eta_1[\vec{g}_2,\vec{g}_1] + \xi_2\eta_2[\vec{g}_2,\vec{g}_2] + \xi_2\eta_3[\vec{g}_2,\vec{g}_3] + \\
+ \xi_3\eta_1[\vec{g}_3,\vec{g}_1] + \xi_3\eta_2[\vec{g}_3,\vec{g}_2] + \xi_3\eta_3[\vec{g}_3,\vec{g}_3] = \\
= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\xi_j\eta_i[\vec{g}_j,\vec{g}_i]\,.
\end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]\,, \quad \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]\,, \quad \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]\,,$$

то мы получим легко запоминаемую формулу

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\,\vec{f}_1 - (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1)\,\vec{f}_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\,\vec{f}_3 =$$

$$= \vec{f}_1 \det\left\|\begin{array}{cc} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{array}\right\| - \vec{f}_2 \det\left\|\begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{array}\right\| + \vec{f}_3 \det\left\|\begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{array}\right\| =$$

$$= \det\left\|\begin{array}{ccc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{array}\right\|.$$

Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ортонормированный*, образующий *правую* тройку векторов, тогда по определению векторного произведения

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1\,, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2\,, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3\,.$$

Тогда формула для векторного произведения векторов в *правом ортонормированном* базисе заметно упростится:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия.

Следствие **Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе**

$$\det\left\|\begin{matrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{matrix}\right\| = \det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{matrix}\right\| = \det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{matrix}\right\| = 0\,,$$

или же (в случае $\vec{b} \neq \vec{o}$) $\quad \dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2} = \dfrac{\xi_3}{\eta_3}\,.$

Следствие **В ортонормированном базисе площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна**

$$S = \sqrt{\det^2\left\|\begin{matrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{matrix}\right\| + \det^2\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{matrix}\right\| + \det^2\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{matrix}\right\|}\,,$$

а для случая на плоскости $S = \left|\det\left\|\begin{matrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{matrix}\right\|\right|\,.$

Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3\}$ и пусть в этом базисе векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют координатные разложения

$$\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3\,, \qquad \vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

и соответственно $\quad \vec{c} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3\,.$

Ранее было показано, что векторное произведение в координатах представимо как

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}_1 \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} - \vec{f}_2 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \vec{f}_3 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix}\,,$$

где

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]\,, \quad \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]\,, \quad \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]\,.$$

Использовав определение смешанного произведения 2.6.1, нетрудно убедиться, что из последних равенств следуют соотношения

$$(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \begin{cases} (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3) & \text{при} \quad k = j, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq j \end{cases} \qquad \forall k, j = 1, 2, 3\,.$$

Тогда мы получим для смешанного произведения будет

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \left(\kappa_1 \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \kappa_2 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \kappa_3 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} \right) (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3) =$$

$$= \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix} (\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3)\,.$$

Действительно, выражение, стоящее в больших круглых скобках, есть разложение детерминанта 3-го порядка по его последней строке.

Замечания: 1) В случае правого ортонормированного базиса мы имеем $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3) = 1$. Поэтому в таком базисе

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{matrix} \right\| .$$

2) Для тройки векторов $\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right\}$ справедлива

Теорема **Тройка векторов $\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right\}$ линейно независимая.**

Следствие **Тройка векторов $\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right\}$ образует базис (называемый *взаимным* к базису $\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3\}$) .**