

Базис. Координаты вектора в базисе

| | |
|-------------|---|
| Определение | <p><i>Базисом на прямой</i> называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.</p> <p><i>Базисом на плоскости</i> называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.</p> <p><i>Базисом в пространстве</i> называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.</p> |
| Определение | <p>Базис называется <i>ортогональным</i>, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).</p> |
| Определение | <p>Ортогональный базис называется <i>ортонормированным</i>, если образующие его векторы имеют единичную длину.</p> |

Теорема Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор \vec{x} в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некоторые числа.

Определение Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в разложении $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ – называются *координатами* (или *компонентами*) вектора \vec{x} в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, которые принято записывать в виде столбца $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, называемым *координатным столбцом* или *координатным представлением* вектора.

Действия с векторами в координатном представлении

Правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема **В координатном представлении операции с векторами выполняются следующим образом:**

1°. *Равенство векторов* Два вектора

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \\ \text{и} \quad \vec{y} &= \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \end{aligned}$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:

$$\left\| \vec{x} \right\|_{\vec{g}} = \left\| \vec{y} \right\|_{\vec{g}} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases} .$$

2°. *Сложение векторов*

Координатное представление суммы двух векторов

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

$$\text{и } \vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\left\| \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g.$$

3°. *Умножение векторов на число*

Координатное представление произведения числа λ на вектор

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

равно произведению числа λ на координатное представление вектора \vec{x} :

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g.$$

Доказательство.

Рассмотрим правило сложения векторов в координатной форме.

$$\begin{aligned}\left\| \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix} \right\|_g &= \left\| (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) \right\|_g = \\ &= \left\| (\xi_1 + \eta_1) \vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2) \vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3) \vec{g}_3 \right\|_g = \\ &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие **Координатное представление линейной комбинации $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ является той же линейной комбинацией координатных представлений векторов \vec{x} и \vec{y} :**

$$\left\| \begin{matrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \eta_3 \end{matrix} \right\| = \lambda \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \mu \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема **Для того чтобы два вектора \vec{x} и \vec{y} на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координатные представления $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$ удовлетворяли условию**

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема **Для того чтобы три вектора в пространстве $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ с координатными представлениями**

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \vec{z} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{matrix} \right\|$$

были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли условию

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача

1) Будут ли линейно зависимы столбцы

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

(Отв. Нет)

2) При каких значениях параметра a будут линейно зависимы столбцы

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} ?$$

(Отв. При $a = 1$)

Декартова система координат

| | |
|-------------|---|
| Определение | Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O , в которую помещены начала всех базисных векторов, называется <i>общей декартовой системой координат</i> и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. |
| Определение | Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется <i>нормальной прямоугольной</i> (или <i>ортонормированной</i>) системой координат. |

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор \vec{r} , начало которого находится в точке O , а конец – в точке M .

| | |
|-------------|---|
| Определение | Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется <i>радиусом-вектором</i> точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. |
| Определение | Координаты радиуса-вектора точки M называются <i>координатами точки M</i> в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. |

Изменение координат при замене базиса и начала координат

Пусть даны две декартовы системы координат: “старая” $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и “новая” $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$. Выразим векторы “нового” базиса, а также вектор \vec{OO}' через векторы “старого” базиса. В силу свойств базиса это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned} \vec{g}'_1 &= \sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3, \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3, \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3, \\ \vec{OO}' &= \beta_1 \vec{g}_1 + \beta_2 \vec{g}_2 + \beta_3 \vec{g}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда справедлива

Теорема Координаты произвольной точки в “старой” системе координат связаны с ее координатами в “новой” соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11} \xi'_1 + \sigma_{12} \xi'_2 + \sigma_{13} \xi'_3 + \beta_1, \\ \xi_2 &= \sigma_{21} \xi'_1 + \sigma_{22} \xi'_2 + \sigma_{23} \xi'_3 + \beta_2, \\ \xi_3 &= \sigma_{31} \xi'_1 + \sigma_{32} \xi'_2 + \sigma_{33} \xi'_3 + \beta_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение Формулы (2) называются *формулами перехода* от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к системе координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

| | | | |
|-------------|---------------------------------------|---|---|
| Определение | Матрица | $\ S\ = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ | называется <i>матрицей перехода</i> от базиса |
| | $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ | к базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$. | |

Теорема Для матрицы перехода

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Задача

Записать формулы прямого и обратного перехода для двух декартовых систем координат, показанных на рис. 1.

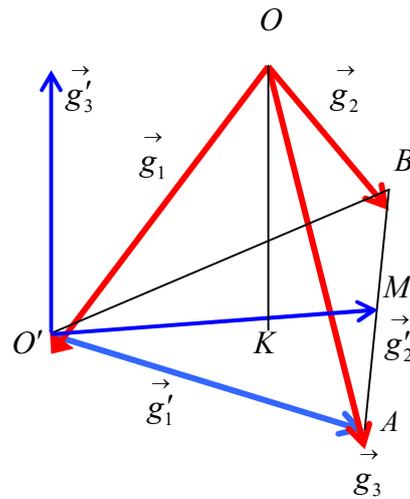


Рис. 1.

Здесь $OO'AB$ - правильная треугольная пирамида, точка M - середина AB и $\vec{g}'_3 = -\vec{OK}$. OK - высота пирамиды.

Решение

Найдем формулы перехода от системы координат $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к $\{\vec{O}', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$. Имеем из рис. 02.04.01. $\vec{OO}' = \vec{g}_1$. А для "новых" базисных векторов

$$\begin{aligned}\vec{g}'_1 &= -\vec{g}_1 + \vec{g}_3 \\ \vec{g}'_2 &= -\vec{g}_1 + \frac{\vec{g}_2 + \vec{g}_3}{2} \\ \vec{g}'_3 &= -\vec{g}_1 + \vec{O'K} = -\vec{g}_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{g}_1 - \frac{1}{3}\vec{g}_2 - \frac{1}{3}\vec{g}_3.\end{aligned}$$

Записав в виде столбцов найденные координатные разложения "новых" базисных векторов по "старым", получим *матрицу перехода*

$$\|S\| = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $\frac{1}{2}$. Теперь записываем формулы *прямого перехода*

$$\begin{cases} \xi_1 = -\xi'_1 - \xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 + 1 \\ \xi_2 = \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 \\ \xi_3 = \xi'_1 + \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 \end{cases}.$$

Найдем теперь формулы *обратного перехода*. Для этого сначала выразим векторы "старого" базиса через векторы "нового".

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= -\frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3 \\ \vec{g}_2 &= \vec{OM} + \vec{MB} = (\vec{KM} - \vec{g}'_3) + (\vec{g}'_2 - \vec{g}'_1) = -\vec{g}'_1 + \frac{4}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3 \\ \vec{g}_3 &= \vec{g}_1 + \vec{g}'_1 = \vec{g}'_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3.\end{aligned}$$

Тогда матрица обратного перехода будет иметь вид

$$\|T\| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

причем $\det\|T\| = 2$. Наконец, формулы обратного перехода будут

$$\begin{cases} \xi'_1 = & -\xi_2 & +\xi_3 \\ \xi'_2 = -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{4}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{2}{3} \\ \xi'_3 = -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 + 1 \end{cases}$$

так как $\vec{O'O} = -\vec{g}_1 = \frac{2}{3}\vec{g}'_2 + \vec{g}'_3$.

Решение получено

Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости

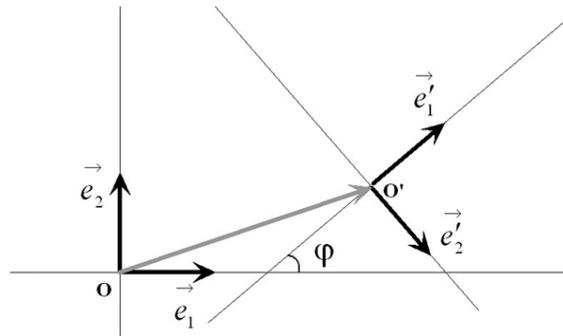
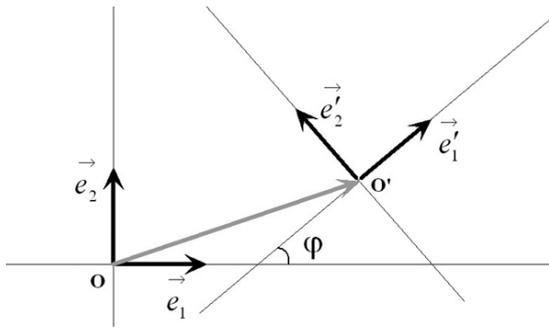
Рассмотрим две ортонормированные системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рисунке. Из геометрически очевидных соотношений

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi \quad \text{и} \quad \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi$$

получаем матрицу перехода: $\|S\| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$,

и если $\vec{OO'} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}$, то “старые” координаты будут связаны с “новыми” как

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi - \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi + \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2. \end{cases}$$



Во первом случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса “старой” системы на вектор $\vec{OO'}$ и поворота на угол φ вокруг точки O' .

Иногда, после совмещения векторов \vec{e}_1 и \vec{e}'_1 , еще потребуется отражение вектора \vec{e}_2 симметрично относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi + \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi - \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2. \end{cases}$$