Направленные отрезки

Определение	Отрезок прямой, концами которого служат точки A и B, называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является *началом,* и какая – *концом* отрезка. Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым направленным отрезком*.

Действия с направленными отрезками

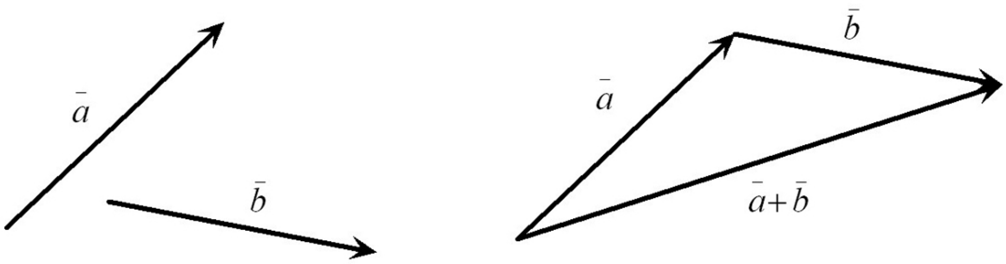
Определение	Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если их начала и их концы могут быть совмещены параллельным переносом одного из этих отрезков.

Заметим, что в силу данного определения *параллельный перенос* направленных отрезков *не меняет*.

Пусть даны два направленных отрезка $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Определение	Совместим начало отрезка $\overline{b}$ с концом $\overline{a}$ (то есть построим направленный отрезок $\overline{b'}$, равный $\overline{b}$, начало которого совпадает с концом отрезка $\overline{a}$), тогда направленный отрезок $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом $\overline{a}$ и конец с концом $\overline{b'}$, называется *суммой* направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Это определение иногда называют *правилом треугольника*



Определение	Под произведением $\lambda\overline{a}$ направленного отрезка $\overline{a}$ на число λ понимают: при $\lambda = 0$ нулевой направленный отрезок, при $\lambda \neq 0$ направленный отрезок, для которого длина равна $\lvert\lambda\rvert\lvert\overline{a}\rvert$; направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, направление противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.

Определение множества векторов

Определение

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены операции:

- сравнения ;
- сложения
- умножения на вещественное число

называется *множеством векторов*.

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например, $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{o}$.

Теорема **Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:**

1°. Коммутативности $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2°. Ассоциативности

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c};$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$$

3°. Дистрибутивности

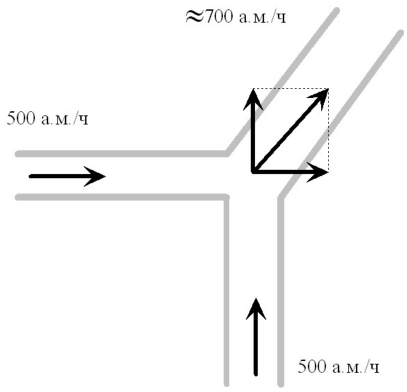
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ **и** $\vec{c}$ **и любых вещественных чисел** λ **и** μ.

Замечания об определении векторов

Не любые объекты, для описания которых, требуется указать их числовое значение и направление, являются векторами. Например, потоки жидкости, газов, электрических зарядов или автомобилей на улице.



Такие объекты, например, можно суммировать друг с другом, но не по правилу параллелограмма (см. рисунок).

Задача 2.01 *Пусть O точка пересечения медиан произвольного треугольника ABC. Доказать, что* $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{o}$

Решение

a) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (Рис. 1.) .

Выразим векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ через векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$. Используем свойства медиан и диагоналей параллелограмма, а также правила действий с векторами. Получаем, что

$$\vec{OA} = -\frac{2}{3}\vec{AM} = -\frac{2}{3}\frac{\vec{AB}-\vec{CA}}{2}.$$

Аналогично находим, что

$$\vec{OB} = -\frac{2}{3}\vec{BN} = -\frac{2}{3}\frac{\vec{BC}-\vec{AB}}{2},$$

$$\vec{OC} = -\frac{2}{3}\vec{CK} = -\frac{2}{3}\frac{\vec{CA}-\vec{BC}}{2}.$$

b) Используя полученные равенства, получаем, что

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{o}.$$

Решение получено.

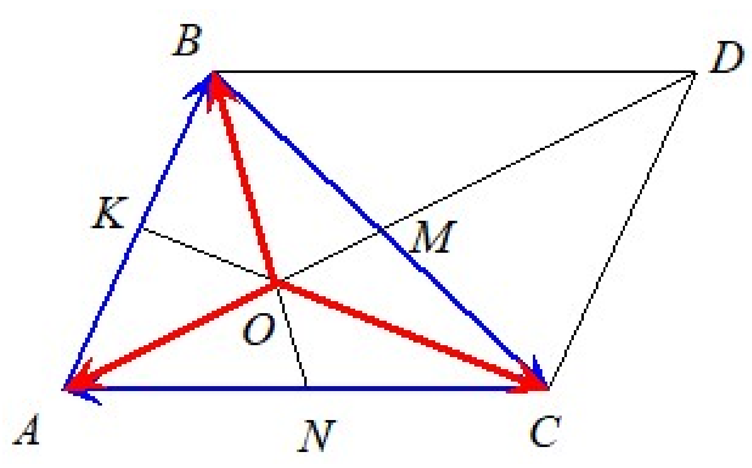


Рис. 1

Линейная зависимость и независимость векторов

Определение	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение	Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_i;\ i = [1, n]$ – некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(k) + F(k+1) + \ldots + F(n) = \sum_{i=k}^{n} F(i),$$

(читается: «сумма $F(i)$ по i от k до n»), где i – индекс суммирования, k – минимальное значение индекса суммирования, n – максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(i)$ – общий вид слагаемого.

Определение

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их *нетривиальная* линейная комбинация *равная нулевому вектору*,

то есть такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.

Определение

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$ следует *тривиальность* линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$, то есть что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Лемма **Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Справедливы следующие утверждения.

Теорема **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теорема **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теорема **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы**.

Следствие **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

Задача 2.02 *Исходя из определения линейной зависимости векторов, доказать, что*

a) векторы, лежащие на двух смежных сторонах прямоугольника, и вектор, лежащий на одной из его диагоналей, линейно зависимы;

b) векторы, лежащие на двух смежных сторонах прямоугольника, линейно независимы.

Решение

a) Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (Рис. 2) Заметим, что $\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$. Поэтому

$$1\cdot\vec{AB}+(-1)\vec{AD}+1\cdot\vec{BD}=\vec{o}.$$

То есть существует нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, равная нулевому вектору. Следовательно, векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BD}$ линейно зависимые.

b) Приравняем некоторую линейную комбинацию исследуемых набора векторов нулевому вектору

$$\lambda_1\vec{AD}+\lambda_2\vec{AB}=\vec{o}$$

Ортогональная проекция этого равенства на прямую AD имеет вид

$$\vec{\Pr}_{AD}(\lambda_1\vec{AD}+\lambda_2\vec{AB})=\Pr_{AD}\vec{o}$$

или $\lambda_1\vec{AD}=\vec{o}$. Откуда $\lambda_1=0$, поскольку $\vec{AD}\neq\vec{o}$.

Но тогда и $\lambda_2=0$. То есть линейная комбинация векторов $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ является тривиальной и, следовательно, эти векторы линейно независимы.

Решение получено.

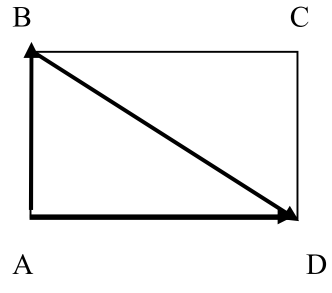


Рис.2