Матричные объекты

Определение .	*Матрицей размера* $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, образующие матрицу, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-ой строке и j-м столбце, как α_{ij}

Определение	Числа m, n и $m \times n$ называются *размерами матрицы*.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами

$$\alpha_{ij}\,;\; i=[1,m]\;;\; j=[1,n]$$

или же в развернутой форме:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

Если же потребуется неразвернутое представление матрицы, то мы запишем ее в виде $\left\| \alpha_{ij} \right\|$ или просто $\left\| A \right\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение	Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка* n. Матрица размера $m \times 1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1 \times n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\|\alpha_{1j}\|$ или $\|\beta_{i1}\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид $\|\alpha_j\|$ или соответственно $\|\beta_i\|$.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение

Квадратная матрица, для которой
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$
называется *симметрической*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают как $\|O\|$.

Квадратная матрица порядка n вида
$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$
называется *единичной*.

Единичную матрицу принято обозначать $\|E\|$.

Операции с матрицами

Определение

Две матрицы $\| A \|$ и $\| B \|$ считаются *равными* (обозначается: $\| A \| = \| B \|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m] \text{ и } \forall j = [1, n].$$

Определение

Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$ (это обозначается как: $\|C\| = \|A\| + \|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m], \ \forall j = [1, n],$$

где числа $\gamma_{ij} \quad \forall i = [1, m]$, $\forall j = [1, n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Определение Матрица $\|C\|$ называется *произведением числа* λ *на матрицу* $\|A\|$ (обозначается: $\|C\| = \lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$ и $\|C\|$ одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m],\ \forall j = [1, n].$$

Отметим, что умножать число можно на матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех (или некоторых) элементов матрицы допускается использование не только чисел, но и *других* математических объектов, для которых подходящим образом определены операции *сравнения, сложения и умножения на число*, например, векторов, функций или тех же матриц.

Задача 1.01 Дать ответ на следующие вопросы с обоснованием.

1) Равны ли матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$?

2) Чему равна сумма $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}$?

3) Чему равно выражение $\begin{Vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -\sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & -\sin^2 x \end{Vmatrix}$?

Решение

1) Не равны, так как есть не равные друг другу элементы с одинаковыми индексами.

2) Эта сумма равна матричному объекту вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

3) Это выражение есть матричная функция вида

$$\begin{Vmatrix} \cos 2x & 1 \\ 1 & \cos 2x \end{Vmatrix}.$$

Решение получено

Определение *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1.1.1).

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^{\mathrm{T}}$.

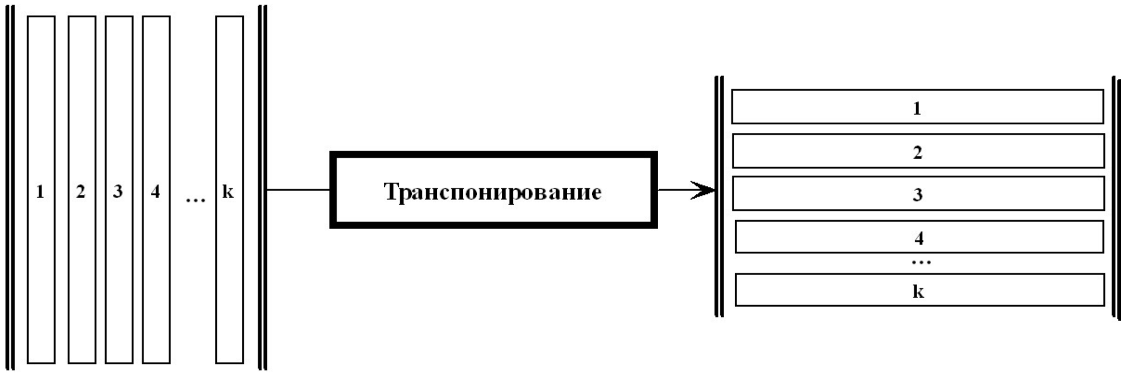


Рис. 1.1.1

Для элементов транспонированной матрицы $\|A\|^{\mathrm{T}}$ верно равенство

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m] \, , \forall j = [1, n] \, .$$

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1 \times m$ в столбец размера $m \times 1$ и наоборот.

Задача 1.02 Дать ответ на следующие вопросы с обоснованием.

1) Выполнима ли операция $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$?

2) Выполнима ли операция $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$?

3) Выполнима ли операция $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & \vec{x} & 1 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$

4) Выполнима ли операция $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & \sin x & 1 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$

Решение

1) Не выполнима, так как не равны размеры слагаемых.

2) Выполнима, поскольку складываемые матрицы имеют одинаковые размеры.

3) Невыполнима, так как невыполнима операция $\vec{x} + 2$.

4) Выполнима в случае, когда "2" обозначает функцию, тождественно равную двум.

Решение получено

Детерминанты (определители) квадратных матриц
2-го и 3-го порядков

Для квадратных матриц вводится специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозначаемая как $\det\|A\|$.

Описание свойств определителей квадратных матриц n-го порядка будет приведено позднее, здесь же мы ограничимся рассмотрением случаев $n=2$ и $n=3$.

Определение.

Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 2-го порядка $\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|$ называется число

$$\det\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\| = \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение.

Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 3-го порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$$

называется число

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + +\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} -$$

$$- \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

Для определителей квадратных матриц справедливы следующие теоремы:

Теорема **Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:**

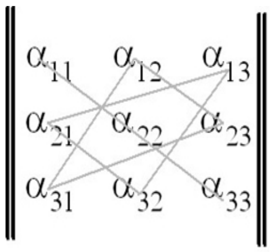
$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\det\begin{Vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} + \alpha_{13}\det\begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{Vmatrix},$$

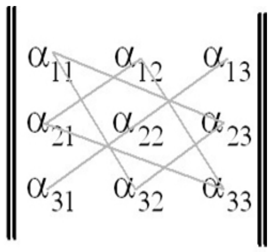
называемой *разложением* определителя по первой строке.

Раскладывать определители можно по *любой* строке (или столбцу), при условии, что знак каждого слагаемого с множителем α_{ij} равен $(-1)^{i+j}$.

Иногда подсчет значения определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить иначе ('Метод треугольников')



Со знаком "плюс"



Со знаком "минус"

Следствие

При *транспонировании* квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители *не меняются*.

Задача 1.03 Вычислить детерминанты матриц.

1) $\begin{Vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{Vmatrix}$.

2) $\begin{Vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$.

3) $\begin{Vmatrix} 123457 & 123456 \\ 123456 & 123455 \end{Vmatrix}$.

4) $\begin{Vmatrix} 50 & -44 & 55 \\ -50 & 71 & -55 \\ 100 & 28 & 110 \end{Vmatrix}$.

Решение

1) -1.

2) -20. Целесообразно использовать разложение определителя по второй строке, или по третьему столбцу.

3) Пусть $a = 123456$, тогда детерминант равен

$$\begin{Vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{Vmatrix} = \left(a^2 - 1\right) - a^2 = -1 .$$

4) Этот определитель равен нулю, поскольку третий столбец равен первому, умноженному на $\frac{11}{10}$.

Решение получено

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема (Крамера).

Для того чтобы система линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Пример 1.04. Найти все решения системы линейных уравнений $\begin{cases} \lambda\xi_1 + 4\xi_2 = \lambda \\ \xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda - 1 \end{cases}$ для любых значений параметра $\lambda \in \mathbf{R}$.

Решение: 1. Теорема Крамера утверждает: для того, чтобы система линейных уравнений $\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$ имела единственное решение $\{\xi_1^*;\xi_2^*\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \neq 0$, при этом $\xi_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда $\Delta = 0$, требуется специальное исследование.

2. В нашем случае

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4 \,,\ \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \text{и}$$

$$\Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \,.$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ по теореме Крамера система имеет единственное решение

$$\xi_1^* = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}\,; \quad \xi_2^* = \frac{\lambda}{\lambda + 2}\,.$$

3. Наконец, при $\lambda = -2$ система имеет вид $\begin{cases} -2\xi_1 + 4\xi_2 = -2, \\ \xi_1 - 2\xi_2 = -3. \end{cases}$ Решений тут нет.

Если же $\lambda = 2$, то система будет $\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 2, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 1. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное множество решений, описываемых формулой $\begin{cases} \xi_1^* = 1 - 2\tau \\ \xi_2^* = \tau \end{cases}$; $\tau \in (-\infty,+\infty)$.

Решение получено

Произведение матриц

\
Определение

Матрица $\|C\|$ размера $m\times n$ с элементами

$$\gamma_{ji} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m]$$

называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m\times l$ с элементами

$$\alpha_{jk} \ \forall j=[1,m],\ \forall k=[1,l]$$

на матрицу $\|B\|$ размера $l\times n$ с элементами β_{ki} $\forall k=[1,l]$, $\forall i=[1,n]$, где

$$\gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\beta_{ki} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m].$$

Результат умножения матриц – матрица $\|C\|$ –.

– есть матрица размера $m\times n$ при любом натуральном l, которая обозначается как $\|C\|=\|A\|\|B\|$. Правило вычисления компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует следующий рисунок.

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1l}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2l}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jl}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{ml}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{li} & \dots & \beta_{ln}\end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1i} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2i} & \dots & \gamma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \dots & \boxed{\gamma_{ji}} & \dots & \gamma_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mi} & \dots & \gamma_{mn}\end{matrix}\right\| \qquad \gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\,\beta_{ki}$$

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|$,

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*

$$\|A\|(\|B\| + \|C\|) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\|.$$

Задача 1.05 Для двух матриц выяснить, в каком порядке их можно умножать и найти размер возможного произведения.

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$.

2) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$.

3) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

Решение

1) Умножение не возможно ни в каком порядке.

2) Вторую матрицу можно умножить на первую, получится матрица 4 x 5.

3) Перемножение возможно в обоих порядках. Если столбец умножается на строку, то получится матрица 5 x 5. Если умножать строку на столбец, то получится матрица 1 x 1 (число!).

Решение получено

Определение Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства

$$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|.$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$.

Определение Матрица $\|A\|$, для которой $\det\|A\| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$, – *невырожденной*.

Лемма **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

Имеет место полезная формула для невырожденной матрицы $\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|}\begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}. \qquad (*)$$

Задача 1.06 Записать условие и решение в матричном виде системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 = 16. \end{cases}$$

Решение

Исходная система в развернутой матричной форме имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 16 \end{Vmatrix}$$

Решение будет

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} -1 \\ 16 \end{Vmatrix}$$

или, по формуле (*),

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{26} \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \\ 16 \end{Vmatrix} == \frac{1}{26} \begin{Vmatrix} 78 \\ 52 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix} .$$

Ответ: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$.

Решение получено

Теорема.

Имеет место соотношение

$$(\|A\|\|B\|)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\|A\|^{\mathrm{T}}.$$

Теорема

Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо соотношение

$$(\|A\|\|B\|)^{-1} = \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}.$$

Задача 1.07 *Проверить тождество* $(\|A\|^{-1})^{\mathrm{T}} = (\|A\|^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Определение Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*

Задача 1.08 *Проверить ортогональность матрицы* $\begin{Vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{Vmatrix}$.