Элементы дифференциальной геометрии

Как было показано в курсе аналитической геометрии, линия Γ в пространстве может быть задана в декартовой системе координат упорядоченной тройкой непрерывных функций

$$\Big\{\ x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ \Big\},$$

где t принадлежит промежутку вещественной оси $\{a, b\}$.

Заметим, что в этом случае также возможно использование векторного способа задания в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$, для которого

$$\|\,\vec{r}(t)\,\| = \left\|\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right\| .$$

Обратите внимание, что при таком определении линии

$$x(t) = R\cos t\ ,\ y(t) = R\sin t\ ,\ z(t) = 0 \quad t \in [0, 2\pi]$$

и

$$x(t) = R\cos t\ ,\ y(t) = R\sin t\ ,\ z(t) = 0 \quad t \in [0, 4\pi]$$

суть *разные* линии, хотя и имеющие одинаковый вид.

Использование дифференциального исчисления позволяет описывать свойства таких линий более полно и точно.

Например, точку t_0 можно назвать *неособой* для линии Γ, если в этой точке

$$x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) > 0\,.$$

Иначе (включая случай недифференцируемости), точку t_0 будем называть *особой*.

Линия называется *кусочно-гладкой* в случае, если она состоит из участков, содержащих только неособые точки, и разделенных особыми точками.

Нетрудно показать, что направление прямой, касательной к линии Γ в неособой точке t_0, задается вектором $\vec{T} = \vec{r}\,'(t_0) = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t}\big(t_0\big)$, который называется *касательным* и для которого

$$\|\,\vec{r}\,'_t(t)\,\| = \left\|\begin{array}{c} x'_t(t) \\ y'_t(t) \\ z'_t(t) \end{array}\right\| .$$

При этом уравнение касательной в векторной форме будет иметь вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \tau\,\vec{T} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}\,,$$

а в координатной, например,

$$\frac{x - x(t_0)}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'_t(t_0)}\,.$$

С другой стороны, точка $\vec{r}(t_0)$ и касательный вектор $\vec{T}$ однозначно определяют уравнением $\big(\,\vec{T},\,\vec{r} - \vec{r}(t_0)\,\big) = 0$ плоскость, называемую *нормальной плоскостью.*

Определим s — *длину линии* Γ как супремум длин всевозможных ломанных, вписанных в Γ .

В этом случае для любой линии без особых точек существует ее представление вида $\vec{r} = \vec{r}(s)$, в котором роль параметра выполняет переменная s — длина дуги Γ , отсчитываемая от некоторой точки линии (например, от ее начала). Такой способ параметрического задания линии принято называть *естественной параметризацией.*

Важно, что при таком представлении линии $\left|\vec{r}\,'_s\right| = 1$. То есть, касательный вектор $\vec{T}$ имеет единичную длину, а его компоненты суть *направляющие косинусы* — косинусы углов между ним и координатными ортами.

При изменении значения t происходит перемещение точки по линии Γ. Касательный вектор при этом также меняется.

Напомним, что в случае постоянства длины вектора его изменение состоит в повороте на некоторый угол.

Производная от единичного касательного вектора (то есть, вектор мгновенной угловой скорости вращения вектора $\dfrac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$) называется *вектором кривизны линии* Γ.

Этот вектор ортогонален касательному, его принято оозначать $\vec{N}$, а его длину $k = |\vec{N}|$ называют *кривизной* линии. В случае естественной параметризации верно равенство $k = \vec{r}\,''_{ss}(s)$.

Как вектор кривизны, так и сама кривизна, являются некоторыми функциями от t.

Введем в рассмотрение еще один вектор $\vec{B} = [\vec{T}, \vec{N}]$ который принято называть *бинормалью* для линии Γ.

При этом векторы $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{N}$ однозначно определяют уравнением $\big(\, \vec{N},\, \vec{r} - \vec{r}(t_0) \,\big) = 0$ плоскость, называемую

спрямляющей плоскостью,

а векторы $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{B}$, в свою очередь, однозначно определяют уравнением $\big(\, \vec{B},\, \vec{r} - \vec{r}(t_0) \,\big) = 0$ плоскость, называемую

соприкасающейся плоскостью.

Стоит обратить внимание на сходство определений касательной прямой к гладкой линии на плоскости и соприкасающейся плоскости для гладкой линии в пространстве.

Напомним, что в точке M касательной к гладкой линии на плоскости (или в пространстве) называется предельное положение секущей MM_1, при $M_1 \to M$. Очевидно, что секущая, проходящая через две лежащие на линии несовпадающие точки M и M_1, единственна.

Для гладкой пространственной линии в точке M соприкасающуюся плоскость можно определить как предельное положение секущей плоскости, проходящей через точки M, M_1 и M_2. Эти точки принадлежат линии Г, не лежат на одной прямой, и при этом $M_1 \to M$, и $M_2 \to M$.

Здесь также очевидно, что такая секущая плоскость единственна для каждой тройки точек M, M_1 и M_2.

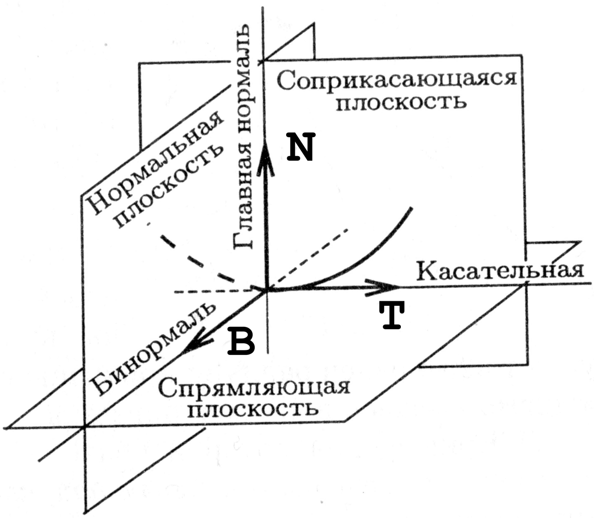

Рис. 1. Сопровождающий трехгранник Френе

Совокупность векторов $\{\vec{T},\ \vec{N},\ \vec{B}\}$ принято называть *сопровождающим трехгранником Френе*. Взаимное расположение этих векторов показано на рис.1.

Соприкасающаяся плоскость при смещении по линии вращается. Мгновенной осью этого вращения служит касательный вектор.

Модуль вектора угловой скорости данного вращения (обозначаемый как κ) называется *кручением*, а сам нормированный вектор этой угловой скорости коллинеарен вектору $\vec{N}$. В этом случае верно равенство

$$\frac{d\vec{B}}{d\,s} = -\kappa\vec{N}\,.$$

Можно также показать, что

$$\frac{d\vec{N}}{d\,s} = -k\vec{T} + \kappa\vec{B}\,.$$

Наконец, окружность, для которой касательный вектор линии также является касательным, называется *соприкасающейся окружностью*. Ее центр лежит на главной нормали и называется *центром кривизны линии* Γ для точки $\vec{r}(t_0)$

Радиус соприкасающейся окружности R называется *радиусом кривизны*. Для него верно равенство $R = \dfrac{1}{k}$.

Совокупность всех центров кривизны называется *эволютой* линии. Если линия Δ является эволютой для Γ, то Γ называется *эвольвентой* для Δ.

Пусть линия Γ задана в виде $\| \vec{r} \| = \left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \right\|$, где функции от произвольного параметра t ; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно. Тогда будут справедливы следующие формулы для кривизны и кручения:

$$k = \frac{|\,[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']\,|}{|\,\vec{r}\,'|^3} \qquad\qquad \kappa = \frac{(\,\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|\,[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']\,|^3}.$$

Например, в правой ортонормированной системе координат формула кривизны принимает вид

$$k = \sqrt{\frac{(y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^3}}.$$

Если же линия плоская (например, она лежит в плоскости Oxy, что дает $z(t) = 0$) , то

$$k = \frac{|\,x'y'' - x''y'|}{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}}.$$

Если плоская линия к тому же является графиком функции $y = f(x)$, то (приняв x за параметр) в силу $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = f'$, $y'' = f''$, мы получим

$$k = \frac{|\,f''|}{\sqrt{\left(1 + f'^2\right)^3}}.$$

Пример 9.1 Найти радиус кривизны для каждой точки параболы $y^2 = 2px$, если $p > 0$.

Решение. Поскольку $R = \dfrac{1}{k}$, то $R = \dfrac{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}}{|\,y''|}$. В нашем случае парабола симметрична оси Ox, поэтому достаточно рассмотреть случай $y \geq 0$.
Имеем

$$y = \sqrt{2px} \quad \Longrightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{p}{2x}}\,.$$

Откуда получаем $R(x) = \sqrt{\dfrac{\left(2x + p\right)^3}{p}}$.

Пример 9.2 На графике функции $y = e^x$ найти точку с максимальной кривизной.

Решение. Для $y = e^x$ имеем $y' = y'' = e^x$. Тогда

$$k(x) = \frac{|\,y''|}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}} = \frac{e^x}{\sqrt{\left(1+e^{2x}\right)^3}}\,.$$

Найдем для функции $k(x)$ стационарные точки. Поскольку

$$k'(x) = \frac{e^x\left(1+e^{2x}\right)^{3/2} - e^x\frac{3}{2}\left(1+e^{2x}\right)^{1/2}e^{2x}2}{\left(1+e^{2x}\right)^3}\,,$$

то $k'(x) = 0,$ если

$$\left(1+e^{2x}\right) - 3e^{2x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{2x} = \frac{1}{2},$$

что дает $x = -\ln\sqrt{2} \approx -0.347$. График функции $k(x)$ показан на рис.2.

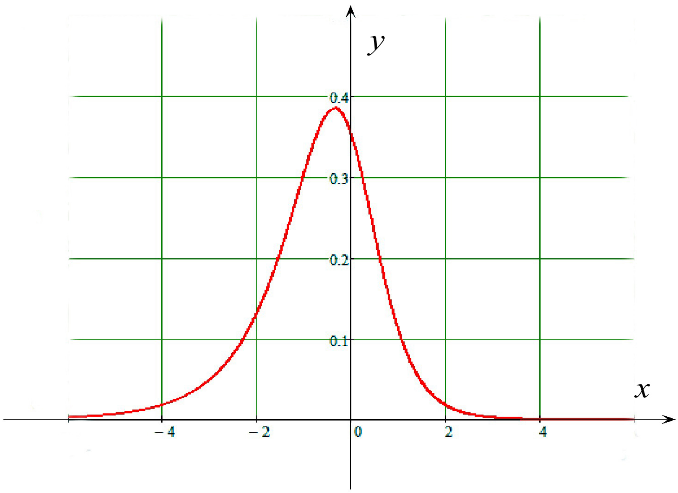

Рис. 2

Пример 9.3 Найти радиус кривизны линии $x(t) = \operatorname{tg} t, \quad y(t) = \cos 2t$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$R(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}}{|\,x'y'' - x''y'|}\,.$$

В нашем случае, при $t = \dfrac{\pi}{4}$ получаем

$$x' = \frac{1}{\cos^2 t} = 2, \qquad y' = -2\sin 2t = -2,$$

$$x'' = \frac{2\sin t}{cos^3 t} = 4, \qquad y'' = -4\cos 2t = 0.$$

Следовательно,

$$R(t) = \frac{\sqrt{\left(2^2 + (-2)^2\right)^3}}{|\,2\cdot 0 - 4(-2)|} = 2\sqrt{2}\,.$$