Исследование свойств функций и построение графиков

Справочные теоретические сведения

Свойства (особенности поведения) функции $y = f(x)$, как *локальные* (т.е. в конкретной точке x_0 или в малой ее окрестности), так и относящиеся в целом к некоторому *промежутку* вещественной оси, будем описывать, используя операции вычисления пределов и дифференцирования, демонстрируя наглядно эти свойства при помощи *графика функции*.

Определение 7.1	*Графиком функции* $y = f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат $\{Oxy\}$ называется совокупность точек координатной плоскости, имеющих координатное представление (координатный столбец) вида $\left\Vert \begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right\Vert \quad \forall x \in D,$ где D — область определения функции.

Для построения графика функции, помимо описания области определения, следует выяснить, является ли функция *непрерывной* (т.е. указать точки разрыва и их односторонние пределы), обладает ли свойством *четности, нечетности* и *периодичности.*

Далее необходимо найти

— *вертикальные асимптоты* графика, то есть прямые вида $x = x_0 \ \ \forall y$, для которых $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$;

— *наклонные и горизонтальные асимптоты* графика, то есть прямые вида $y = ax + b$, для которых $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - ax\big)$;

— *интервалы знакопостоянства* и точки пересечения графика с осями координат.

Используя уже найденную информацию о свойствах функции, целесообразно построить предварительный эскиз графика функции.

На этом этапе также следует попытаться использовать метод *выделения главной части*, суть которого будет разъяснена на конкретных примерах.

Для более точного описания свойств функции $y = f(x)$ необходимо выяснить при каких условиях функция имеет в точке x_0 *локальный экстремум,* то есть, *максимум или минимум.*

Для этого вначале дадим

Определение 7.2	Будем говорить, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный минимум* (*максимум*), если существует $\dot{U}_\rho(x_0)$ — проколотая ρ-окрестность точки x_0 такая, что $$f(x) > f(x_0) \quad \big(f(x) < f(x_0)\big) \quad \forall x \in \dot{U}_\rho(x_0).$$ Если это неравенство оказывается верным во всей области определения, то такой экстремум принято называть *глобальным.*

Кроме того, в дальнейшем, для краткости, точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, будем называть *стационарными.*

Для использования этого определения нам необходимо оценивать знак разности значений $f(x)$ и $f(x_0)$.

В случае дифференцируемой в точке x_0 функции это можно сделать при помощи формулы Тейлора с остаточным членом $o(x-x_0)$, которая дает

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\,.$$

Из этой формулы следует, что в случае $f'(x_0)\neq 0$ экстремума у функции $y=f(x)$ *быть не может.*

Действительно, если взять окрестность $\dot{U}_\rho(x_0)$ настолько малой, чтобы можно было пренебречь $o(x-x_0)$, и выбирая $x=x_0+t$ так, чтобы слагаемое

$$f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)\cdot t>0,$$

то мы получим $f(x_0+t)>f(x_0)$, но при этом очевидно также будет верным (в силу линейности по t) и $f(x_0-t)<f(x_0)\,.$

То есть, в данном случае экстремума нет и мы получаем, что равенство $f'(x_0)=0$ является *необходимым условием наличия экстремума* у функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$.

Заметим, что это условие *не является достаточным.* Пример: у функции $y=x^3$ в точке $x_0=0$ производная равна нулю, но экстремума здесь нет.

Пусть теперь $f'(x_0) = 0$. Это означает, что величина приращения значения функции $y = f(x)$ в малой окрестности точки x_0 определяется формулой

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big) \; .$$

Поскольку множитель $(x-x_0)^2$ неотрицателен, то для любых x в малой окрестности точки x_0 $f(x) > f(x_0)$, если $f''(x_0) > 0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $f''(x_0) < 0$.

Откуда заключаем, что $f''(x_0) > 0$ — *достаточное условие локального минимума* в x_0, а $f''(x_0) < 0$ — *достаточное условие локального максимума.*

Заметим, что это условие *не является необходимым.* Поскольку, например, в $x_0 = 0$ функция $y = x^4$ имеет строгий минимум, но при этом $f''(0) = 0$. Иначе говоря, при одновременном выполнении условий $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$ функция $y = f(x)$ в точке x_0 может как иметь экстремум, так и не иметь его.

Например, у функций $y = x^3$ и $y = x^4$ при $x = 0$ производные первого и второго порядков равны нулю, однако в этой точке вторая из них имеет строгий минимум, а у первой экстремума нет.

Важно: функция может иметь экстремум в точках, где ее *производная не существует.* Например, функция $f(x) = |x|$ имеет при $x_0 = 0$ минимум. При этом данная функция недифференцируема в начале координат.

По аналогии с экстемальными точками для функции можно определить *точки возрастания* и *точки убывания.*

Определение 7.3	Точку x_0 естественно назвать точкой возрастания непрерывной функции $f(x)$, если существует ее δ-окрестность такая, что $$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;\; f(x) < f(x_0) \quad \text{и}$$ $$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \;\; f(x) > f(x_0).$$

Точка убывания может быть определена аналогично.

При этом можно отметить любопытный факт: если функция $f(x)$ определена на интервале, то не обязательно каждая точка этого интервала является либо убывающей, либо возрастающей, либо стационарной.

Например, точка 0 для непрерывной на $\mathbb{R}$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

график которой показан на рис. 1, не принадлежит ни к одному из трех указанных видов.

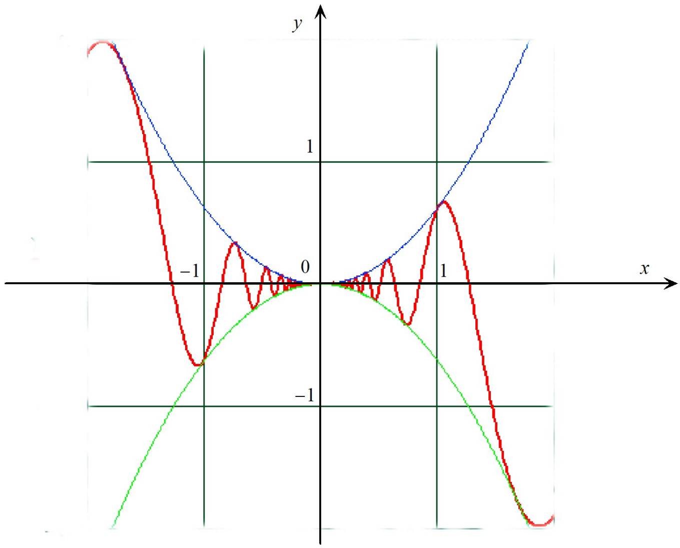

Рис. 1

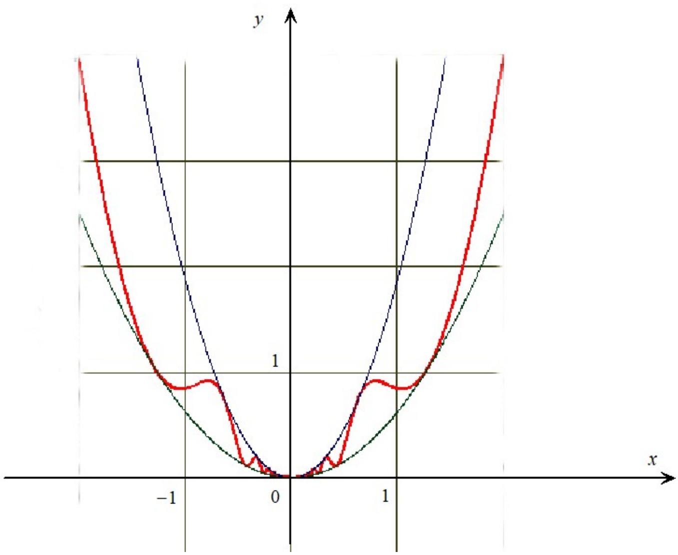

Рис. 2

Аналогично, пример функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right) & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

график которой показан на рис. 2, иллюстрирует тот факт, что для непрерывной в δ-окрестности точки x_0 функции $f(x)$ условие убывания на $(x_0-\delta, x_0)$ с одновременным возрастанием на $(x_0, x_0+\delta)$, для этой функции является *достаточным*, но не необходимым условием существования минимума в x_0.

По схеме, аналогичной исследованию функций на экстремум, можно изучать и другие их локальные свойства.

Для этого вначале дадим

Определение 7.4	Будем говорить, что функция $y = f(x)$ на ненулевом отрезке $[a, b]$ *выпукла вниз* (*вверх*) , если $\forall x_1, x_2$ таких, что $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ имеет место неравенство $$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$ $$\left(\quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad \right) .$$

Нетрудно заметить, что геометрически условие выпуклости вниз означает, что хорда, имеющая своими концами точки с координатами $\left\| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix} \right\|$, расположена на координатной плоскости не ниже графика функции $y = f(x)$. В то время как в случае выпуклости вверх точки этой хорды расположены не выше графика, что иллюстрирует следующий рис. 3.

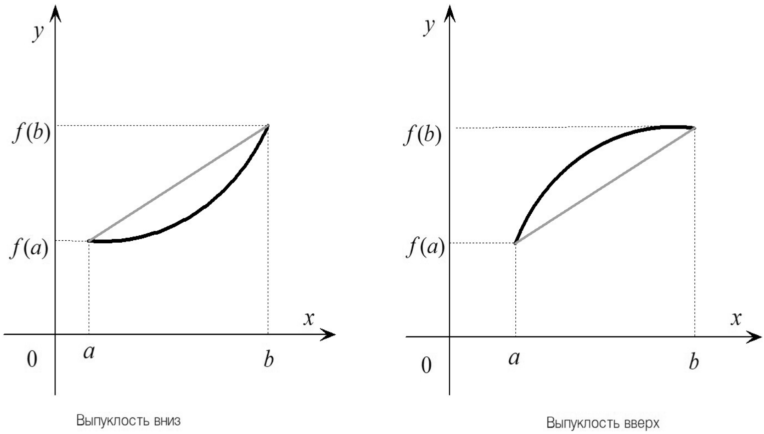

Рис. 3

Выясним условия выпуклости дважды дифференцируемой функции, используя формулы для приближенной оценки значений производных функций при малых по модулю t.

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0+t)-f'(x_0)}{t} \approx$$

$$\approx \frac{\dfrac{f(x_0+2t)-f(x_0+t)}{t} - \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}}{t} =$$

$$= \frac{f(x_0+2t)-2f(x_0+t)+f(x_0)}{t^2}\,.$$

Принимая во внимание, что (в силу определения 7.4) неравенство

$$f(x_0+t) \leq \frac{f(x_0+2t)+f(x_0)}{2}$$

означает *выпуклость вниз* функции $y = f(x)$ в малой окрестности точки x_0+t, а также тот факт, что нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе, можно прийти к заключению, что условие $f''(x_0) \geq 0$ является для этого достаточным.

Аналогично получаем, что выполнения неравенства $f''(x_0) \leq 0$ достаточно, чтобы гарантировать *выпуклость вверх* функции $y = f(x)$ в малой окрестности точки x_0.

Таким образом, заключение о направлении локальной выпуклости исследуемой функции можно делать по знаку ее второй производной.

В процессе исследования функции $y = f(x)$ для построения ее графика целесообразно (хотя и вовсе необязательно!) также находить

— Промежутки монотонности и точки локальных экстремумов (максимумов и минимумов).

— Промежутки выпуклости (вверх или вниз) и точки перегиба.

Кроме того, сведение полученной информации в итоговую таблицу облегчает построение графика функции.

Приближенный эскиз графика

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров полного исследования свойств функций и построения на его основе их графиков, стоит отметить, что на практике часто оказывается достаточным построение приближенного эскиза графика, отражающего лишь некоторые из основных свойств исследуемой функции.

Инструментом построения подобных эскизов может служить *метод выделения главной части*, заключающийся в подборе сравнительно простых функций, аппроксимирующих (в смысле локальной эквивалентности) исследуемую функцию в окрестностях ее нулей, вертикальных асимптот и на бесконечности.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными в точке* x_0, если существует некоторая проколотая окрестность этой точки, в которой $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Эквивалентность принято обозначать так: $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to x_0$.

Метод выделения главной части основывается на предположении о том, что исследуемая функция $y(x)$ может быть записана в виде

$$y(x) = (x - x_0)^{\frac{p}{q}}\, g(x)\,, \quad \text{где} \quad g(x_0) \neq 0\,.$$

Также предполагается, что p и $q \neq 0$ суть целые числа, а функция $g(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, то есть, представима как

$$g(x) = g(x_0) + A(x)\,, \quad \text{где} \quad \lim_{x \to x_0} A(x) = 0\,.$$

В этом случае за главную часть функции $y(x)$ в малой окрестности точки x_0 принимается функция $g(x_0)\,(x - x_0)^{\frac{p}{q}}$.

Поясним метод выделения главной части следующим примером. Пусть требуется построить приближенный эскиз графика функции $y(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

Заметим, что $y(x) \sim x^3$ в точке $x_0 = 0$, $y(x) \sim \dfrac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x_0 = 1$ и, наконец, $y(x) \sim x$ при $x \to \infty$.

Построим фрагменты функций, локально эквивалентных $y(x)$. На рис. 4 эти фрагменты, являющиеся соответствующими главными частями для функции $y(x)$, показаны красным цветом.

Затем соединим гладким образом концы фрагментов между собой синими линиями. Полученный рис. 4 и является требуемым эскизом.

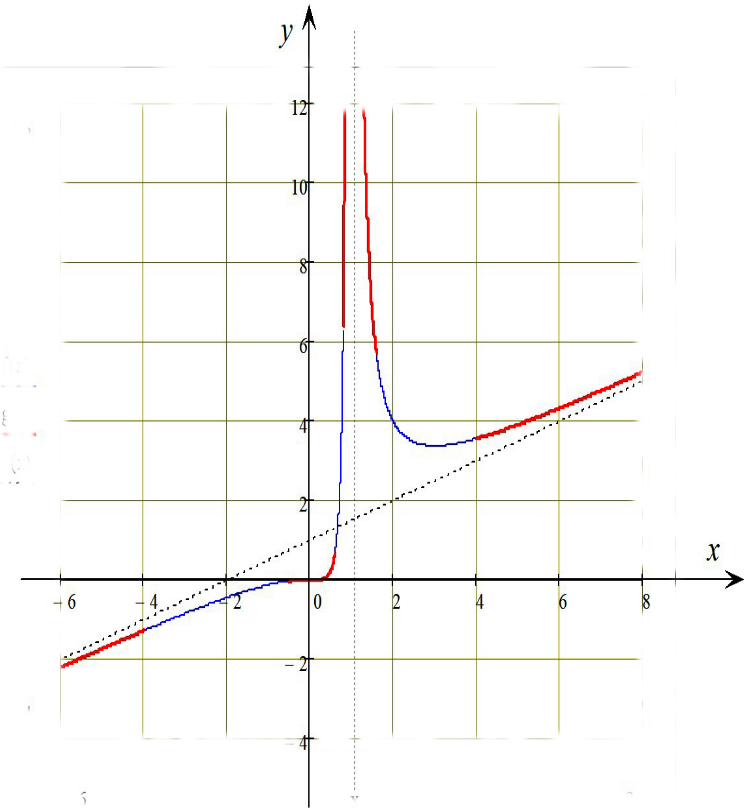

Рис. 4

При построении эскиза графика нужно также следить за знаком выделенной главной части, то есть, за знаком числа $g(x_0)$. Эта характеристика (знак функции) может меняться лишь в нулях функции или в точках разрыва (например, на вертикальных асимптотах).

Ниже приведены примеры главных частей исследуемой функции. Для упрощения во всех случаях предполагается, что знак главной части положительный и что $x_0 = 0$.

Таблица 1.

ВИД ГЛАВНОЙ ЧАСТИ	ПРИМЕР
Простое пересечение $\left(\dfrac{p}{q} = 1\right)$	$y(x) \sim x$
Касание без пересечения $\left(\dfrac{p}{q} = 2k \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim x^2$
Касание с пересечением $\left(\dfrac{p}{q} = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim x^3$
Вертикальное касание одностороннее $\left(\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2k} \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim \sqrt{x}$
Вертикальное касание с пересечением $\left(\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim \sqrt[3]{x}$
Вертикальное касание с возвратом $\left(\dfrac{p}{q} = \dfrac{2m}{2k+1} \quad k \geq m \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim \sqrt[3]{x^2}$
Двусторонняя вертикальная асимптота $\left(\dfrac{p}{q} = -2k+1 \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim \dfrac{1}{x}$
Односторонняя вертикальная асимптота $\left(\dfrac{p}{q} = -2k \quad k \in \mathbb{N}\right)$	$y(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$

Понятно, что эту таблицу можно существенно расширить, однако для разъяснения сути метода выделения главной части приведенных случаев вполне достаточно.

На рис. 5 приведены графики главных частей, включенных в следующую таблицу.

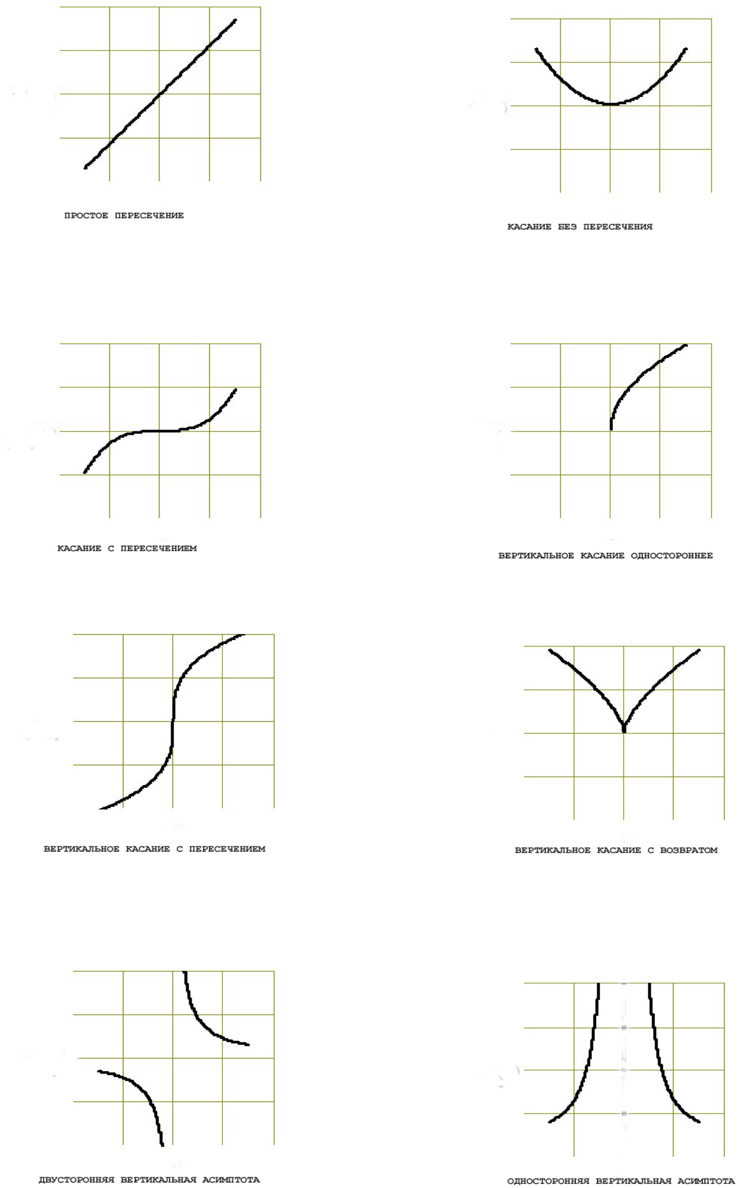
ПРОСТОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ
КАСАНИЕ БЕЗ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
КАСАНИЕ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ
ВЕРТИКАЛЬНОЕ КАСАНИЕ ОДНОСТОРОННЕЕ
ВЕРТИКАЛЬНОЕ КАСАНИЕ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ
ВЕРТИКАЛЬНОЕ КАСАНИЕ С ВОЗВРАТОМ
ДВУСТОРОННЯЯ ВЕРТИКАЛЬНАЯ АСИМПТОТА
ОДНОСТОРОННЯЯ ВЕРТИКАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

Рис. 5

Рассмотрим еще два примера, иллюстрирующих особенности применения метода выделения главной части.

Пример 7.1. Построить эскиз графика функции

$$y(x) = \frac{(x+2)^2 x^3 (x-3)}{(x+1)^2 (x-2)}.$$

Решение. Построим локальные аппроксимации данной функции для каждой из точек, в которых применим метод выделения главной части. Получаем следующий набор главных частей:

x_0	ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ в x_0	ВИД ГЛАВНОЙ ЧАСТИ
$-\infty$	$y(x) \sim x^3$	Кубичная парабола
-2	$y(x) \sim -10(x+2)^2$	Касание без пересечения
-1	$y(x) \sim -\frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)^2}$	Односторонняя вертикальная асимптота
0	$y(x) \sim 6x^3$	Касание с пересечением
2	$y(x) \sim -\frac{128}{9}\frac{1}{x-2}$	Двусторонняя вертикальная асимптота
3	$y(x) \sim \frac{675}{16}(x-3)$	Простое пересечение
$+\infty$	$y(x) \sim x^3$	Кубичная парабола

Построим главные части, локально эквивалентные $y(x)$ для выбранных точек x_0 . На рис. 6 эти главные части для функции $y(x)$, показаны синим цветом. Затем гладким образом соединим концы главных частей черными линиями. Полученный рис. 6 является требуемым эскизом.

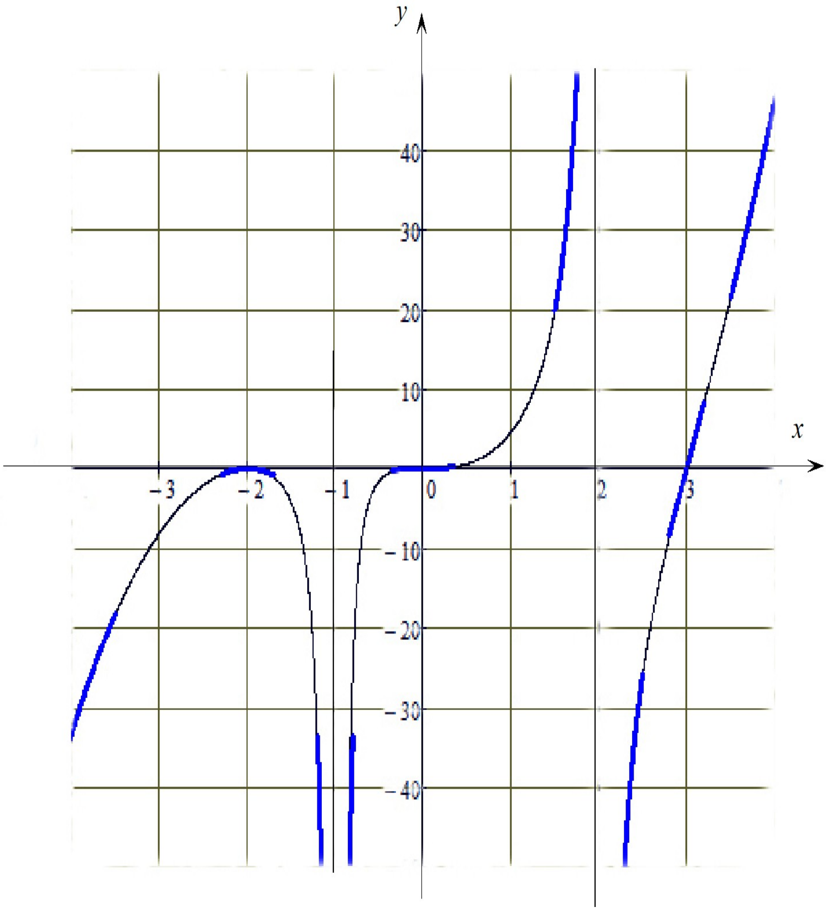

Рис. 6

Пример 7.2. Построить эскиз графика функции

$$y(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}\,.$$

Решение. Данная функция $y(x) = p\Big(q(x)\Big)$ является сложной функцией, то есть, суперпозицией функций, внутренняя из которых $q(x) = \sin^2 x$ есть четная, π-периодическая, непрерывная и имеющая очевидные локальные экстремумы: нулевые минимумы в точках $\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}$ и максимумы, равные 1, в точках $\dfrac{\pi}{2} + \pi k\,.$

Внешняя функция $p(x) = \sqrt[3]{x}$ определена, непрерывна и монотонна на всей вещественной оси. Поэтому функция $y(x)$ также будет четной, непрерывной, π-периодической и имеющей локальные экстремумы в тех же точках, что и $q(x)\,.$

Нетрудно также проверить, что $y(x)$ имеет конечные производные первого и второго порядков во всех точках, кроме $\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Описание поведения исследуемой функции в окрестностях экстремальных точек, в силу ее π-периодичности получим, применяя метод выделения главной части .

Из формулы Маклорена для функции $\sin x$ следует, что $\sin x \sim x$ при $x_0 = 0$. Поэтому $y(x) \sim \sqrt[3]{(x-x_0)^2}$ в окрестности точек $x_0 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Согласно шестой строке таблицы 1 это будут точки возврата с вертикальной касательной.

Нетрудно проверить, что в точках $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ справедливы равенства $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 0$ и $y''(x_0) = -\dfrac{2}{3}$. Тогда по формуле Тейлора

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}\big(x - x_0\big)^2 + o\Big(\big(x - x_0\big)^3\Big),$$

то есть, в точках x_0 главная часть функции $y(x)$ равняется $1 - \dfrac{1}{3}\big(x - x_0\big)^2$.

В итоге, требуемый эскиз графика функции $y(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ будет иметь вид, показанный на рис. 7.

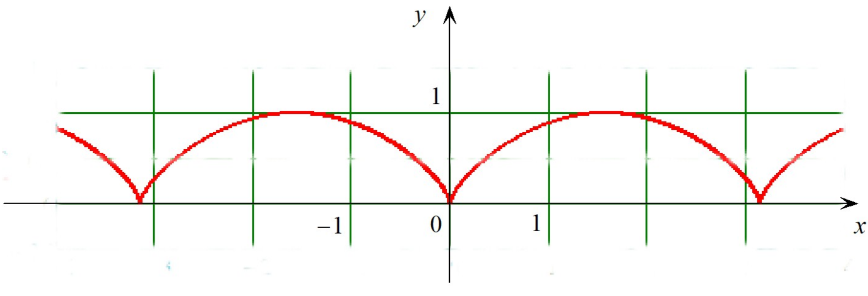

Рис. 7

Детальное исследование функций

Рассмотрим теперь примеры подробного исследования функций и построения их графиков.

Пример 7.3. Исследовать функцию $y = x^3 - 2x + 1$ и построить ее график.

1°. *Область определения*: все операции, использованные для записи формулы функции, выполнимы для любых действительных x. Значит $X : x \in (-\infty, +\infty)$.

2°. *Область значений*: в силу того, что уравнение $x^3 - 2x + 1 = p$ имеет вещественные решения для любого вещественного значения параметра p, (факт, обоснование которого выходит за рамки данного курса) можно утверждать, что областью значений является множество всех вещественных чисел.

3°. Данная функция $y = f(x)$ свойствами *четности, нечетности и периодичности* не обладает.

4°. Поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1 \ ,$$

асимптотически (то есть, при больших по модулю значениях x) данная функция ведет себя подобно функции $y = x^3$, которую логично назвать *главной частью* на $\pm\infty$.

5°. *Промежутки знакопостоянства*: преобразуем формулу функции

$$y = x^3 - 2x + 1 = (x^3 - x) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 1) =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - 1) \ ,$$

где

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1.6 \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.6 \ .$$

Используя “метод интервалов”, приходим к заключению, что

$$y \geq 0, \ \text{если} \ \left[\begin{array}{r} x_1 \leq x \leq x_2 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \qquad \text{и} \qquad y < 0, \ \text{если} \ \left[\begin{array}{r} x < x_1 \\ x_2 < x < 1 \ . \end{array} \right.$$

6°. *Промежутки монотонности*: согласно определению 7.3 значение дифференцируемой функции возрастает в окрестности точки, где производная положительна, и соответственно убывает там, где производная отрицательна.

Поэтому для определения промежутков возрастания или убывания значений функции необходимо найти ее производную функцию и исследовать ее "на знак".

В нашем случае $y' = 3x^2 - 2$, поэтому можно утверждать, что

$$y' \geq 0, \text{ если } x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \text{ либо } x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

и

$$y' < 0, \text{ если } -\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

7°. *Направление выпуклости*: точки $x_3 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $x_4 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ – стационарные, в них первая производная обращается в нуль.
Факт наличия в этих точках экстремума можно установить по знаку второй производной, которая равна $y'' = 6x$.
Это означает, что при положительных x график функции имеет выпуклость вниз, при отрицательных – выпуклость вверх, а при $x = 0$ направление выпуклости меняется на противоположное, то есть это – *точка перегиба* графика функции.

Кроме того, отсюда следует, что в точке $x_3 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ функция имеет локальный максимум, а в точке $x_4 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ – локальный минимум.

8°. *Сводная таблица свойств функции*

x	$-\infty$	$-$	x_1	$-$	x_3	$-$	0	$+$	x_2	$+$	x_4	$+$	1	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
y''	$-\infty$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	0	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$+\infty$
					max		пер.				min				

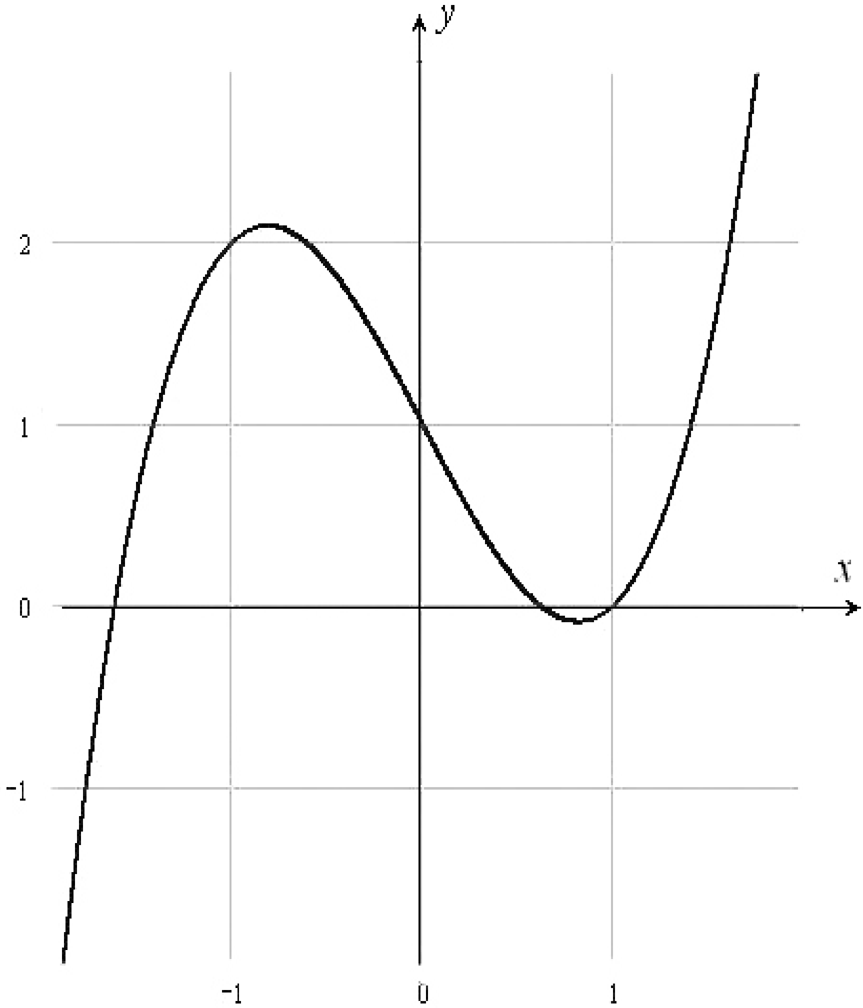

Рис. 8. График функции $y = x^3 - 2x + 1$

Пример 7.4. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3+6x-2}{x^2}$ и построить ее график.

1°. *Область определения*: любые действительные $x \neq 0$.

2°. *Область значений*: любые действительные y.

3°. Данная функция не обладает свойствами *четности, нечетности или периодичности.*

4°. График функции имеет вертикальную асимптоту при $x \to 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+6x-2}{x^2} = -\infty$. Кроме того, переписав формулу задающую исследуемую функцию в виде $y = x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}$, можно заметить, что эта функция имеет наклонную асимптоту вида $y = x$, которую можно назвать *главной частью* на $\pm\infty$.

5°. *Промежутки знакопостоянства*: из формулы $y = x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}$, очевидно, что $y < 0$ при любых $x < 0$. В области $x > 0$ знак y совпадает со знаком трехчлена $x^3 + 6x - 2$, который отрицателен при $x < \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ и положителен при $x > \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

Это утверждение явно не очевидно, и потому приведем его обоснование, использовав “школьные методы”, хотя проще было бы применить какой-нибудь компьютерный инструмент, например, MathCAD или MAPPLE.

Нам надо найти вещественные корни уравнения $x^3 + 6x - 2 = 0$. Будем искать их в виде суммы двух новых неизвестных $x = u+v$. Подставив их в уравнение, получим

$$(u+v)^3+6(u+v)-2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(u^3 + v^3 + 3uv(u+v)\big)+6(u+v)-2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \big(u^3 + v^3 - 2\big) + (u+v)(3uv+6) = 0\ .$$

Откуда получаем: для того чтобы x было решением данного уравнения необходимо, чтобы значения неизвестных u и v удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2, \\ uv = -2, \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна системе

$$\begin{cases} v = -\frac{2}{u}, \\ u^3 - \frac{8}{u^3} = 2. \end{cases}$$

Введем новую неизвестную $t = u^3$, тогда второе уравнение последней системы сводится к квадратному и легко решается:

$$t - \frac{8}{t} - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = 4, \\ t_2 = -2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u_1 = \sqrt[3]{4}, \\ u_2 = -\sqrt[3]{2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} v_1 = -\sqrt[3]{2}, \\ v_2 = \sqrt[3]{4} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x_3 = u+v = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\ .$$

6°. *Промежутки монотонности*: для данной функции

$$y' = \frac{x^3-6x+4}{x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x-2)}{x^3} = \frac{(x-2)(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})}{x^3}$$

поэтому можно утверждать, что

$$y' = 0, \text{ если } \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1+\sqrt{3}, \\ x = -1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

и, согласно "методу интервалов",

$$y' > 0, \text{ если } x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \bigcup (0, -1+\sqrt{3}) \bigcup (2, +\infty)$$

$$\text{и} \quad y' < 0, \text{ если } (-1-\sqrt{3}, 0) \bigcup (-1+\sqrt{3}, 2)\ .$$

7°. *Направление выпуклости*: вторая производная в рассматриваемом случае равна $y'' = \frac{12(x-1)}{x^4}$. Поэтому при $x < 1$ график функции имеет выпуклость вверх, а при $x > 1$ – выпуклость вниз. Отсюда следует, что в точке $x = 2$ функция имеет локальный минимум, в точках $x_1 = -1-\sqrt{3}$ и $x_2 = -1+\sqrt{3}$ – локальный минимум, а в точке $x = 1$ – точку перегиба графика функции.

8°. *Сводная таблица свойств функции*

x	$-\infty$	$-$	x_1	$-$	0	$+$	x_3	$+$	x_2	$+$	1	$+$	2	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
y''	-0	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$-\infty$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	0	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$+0$
	асим.		max		в.ас.				max		пер.		min		асим.

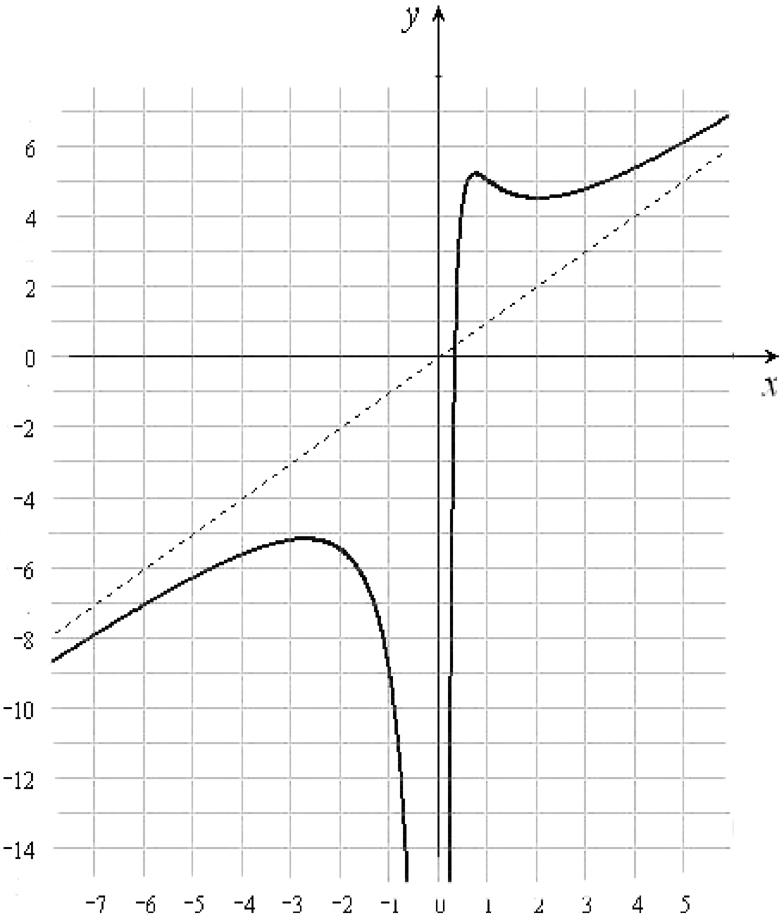

Рис. 9. График функции $y = \frac{x^3+6x-2}{x^2}$

Пример 7.5. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ и построить ее график.

1°. *Область определения*: $y(x)$ определена и непрерывна для любых действительных x, то есть, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

2°. *Область значений*: очевидно, что область значений — множество всех действительных чесел.

3°. Функция не обладает свойствами *четности, нечетности или периодичности.*

4°. Поскольку

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} = x\left(1 - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

то график данной функции асимптотически приближается к прямой $y = x - \frac{2}{3}$ как главной части.

Заметим, что уравнение наклонной асимптоты $y = ax + b$ в данном примере могло быть получено и с помощью пределов

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x}}{x} = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(y(x) - ax\big) = \lim_{x\to\infty} \big(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\big) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\,2}{\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \dfrac{2}{x}} + 1} = -\frac{2}{3}.$$

5°. *Промежутки знакопостоянства*: подкоренное выражение в $\sqrt[3]{x^3-2x^2}$ представимо в виде $x^2(x-2)$, откуда следует, что $y(x)$ отрицательна на $(-\infty,0)\bigcup(0,2)$, положительна на $(2,+\infty)$ и равна 0 при $x_1=0$ и $x_2=2$.

6°. *Промежутки монотонности и экстремумы*: в рассматриваемом случае найдем с помощью

$$y'(x)=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}} \qquad \text{при} \quad x\neq 0 \quad \text{и} \quad x\neq 2\,.$$

В точках $x_1=0$ и $x_2=2$ абсолютная величина $y'(x)$ стремится к бесконечности, причем в любой, достаточно малой окрестности точки $x_2=2$ значение $y'(x)$ положительно, а при переходе через точку $x_1=0$ производная меняет свой знак с плюса на минус.

В было показано в п. 5°, что значения функции $y(x)$ в этих точках равно 0 (т.е., конечно). Геометрически это означает вертикальность касательной к графику $y(x)$ для данных точек.

Наконец, очевидно, что при переходе через точку $x_1=0$ производная меняет знак с плюса на минус и при этом $y(0)=0$. Значит, в нуле функция имеет локальный максимум.

В точке же $x_3=\frac{4}{3}$ производная равна нулю и при проходе через нее меняет знак с минуса на плюс, имеем локальный минимум со значением $y\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

7°. *Направление выпуклости*: можно установить по знаку второй производной, которая в рассматриваемом случае (как показывают не очень короткие и потому опущенные здесь вычисления) равна

$$y''(x) = -\frac{8}{3x(x-2)\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Из этой формулы следует, что $\forall x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 2)$ вторая производная положительна и, значит, график функции имеет выпуклость вниз, а при $2 < x < +\infty$ – выпуклость вверх.

Таким образом, в точке $x_2 = 2$ функция имеет перегиб, а в точке $x_1 = 0$, где вторая производная не существует и при переходе через нее сохраняется направление выпуклости, особенность, называемую *точкой возврата.*

8°. *Сводная таблица свойств функции*

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{4}{3}$	$+$	2	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y'	$\to 1$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$\to 1$
y''	$\to +0$	$\bigcup$	$+\infty$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\pm\infty$	$\bigcap$	$\to -0$
	асимпт.		max и возвр.		min		перег. и вер. кас.		асимпт.

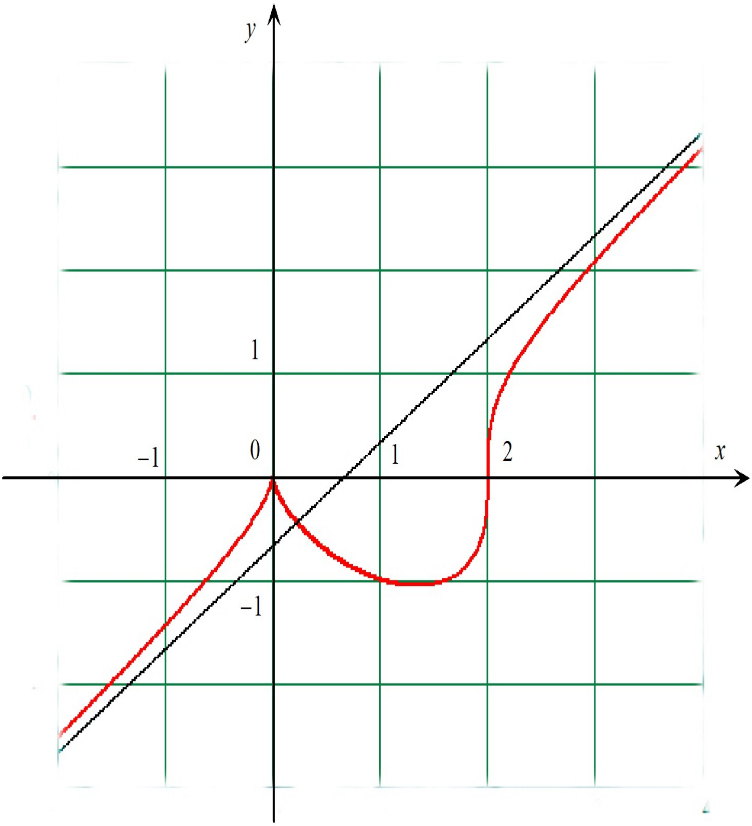

Рис. 10. График функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$

Пример 7.6. Исследовать функцию $y(x) = 2x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ и построить ее график.

1°. *Область определения*: $y(x)$ определена и непрерывна $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Заметим, что исследуемую функцию можно записать так

$$y(x) = \begin{cases} 2x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{при} \quad |x| \geq 1\,, \\ 2x + \sqrt{1 - x^2} & \text{при} \quad |x| < 1\,. \end{cases}$$

2°. *Область значений*: очевидно, что область значений — множество всех действительных чесел.

3°. Функция не обладает свойствами *четности, нечетности или периодичности.*

4°. Уравнение наклонной асимптоты $y = ax + b$ в данном примере получается отдельно для $+\infty$ и $-\infty$ с помощью пределов для коэффициента a

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \right) = \begin{cases} 3 & \text{при} \quad x \to +\infty\,, \\ 1 & \text{при} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

и, соответственно, для коэффициента b

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(y(x) - ax \big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(2x + \sqrt{x^2 - 1} - ax \big)\,,$$

где имеем два случая:

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2 - 1} - x \big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\,1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0$$

и

$$b_- = \lim_{x\to-\infty} \big(\sqrt{x^2 - 1} + x \big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\,1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0$$

Итак, получили две асимптоты: $y = 3x$ при $x \to +\infty$ и $y = x$ при $x \to -\infty$.

5°. *Промежутки знакопостоянства*: Из определения арифметического квадратного корня следует, что решения уравнения

$$2x + \sqrt{|x^2 - 1|} = 0$$

(если таковые существуют) могут быть только неположительными числами.
После возведения в квадрат мы приходим уравнению

$$4x^2 = |x^2 - 1|,$$

у которого при $x \leq -1$ корней нет, а на полуинтервале $-1 < x \leq 0$ есть единственный корень $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Поскольку исследуемая функция непрерывна на всей вещественной оси и точка x_1 ее единственный нуль, то очевидно, что $y < 0$ при $x < x_1$ и $y > 0$ при $x > x_1$.

6°. *Промежутки монотонности и экстремумы*: будем искать, вычислив производную функцию

$$y'(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{при} \quad |x| > 1\,, \\ 2 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{при} \quad |x| < 1\,. \end{cases}$$

В точках $x_2 = -1$ и $x_3 = 1$ абсолютная величина $y'(x)$ стремится к бесконечности, причем при переходе этих точек производная меняет свой знак с минуса на плюс. Эти точки суть локальные минимумы функции, являющиеся точками возврата, касательная к графику в которых вертикальна.

С другой стороны, в точках $x_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x_5 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак с плюса на минус. Данные точки для исследуемой функции будут точками строгого локального максимума с горизонтальной касательной в них.

7°. *Направление выпуклости* определим по знаку второй производной, которая равна

$$y''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} & \text{при} \quad |x| > 1\,, \\ -\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{при} \quad |x| < 1\,. \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что $\forall x \in \mathbb{R}$ таких, что $|x| \neq 1$, вторая производная отрицательна и, значит, график функции имеет выпуклость вверх. В точках $|x| = 1$ вторая производная стремится к $-\infty$.

8°. *Сводная таблица свойств функции*

x	$-\infty$	$-$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-$	-1	$-$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\mp$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$+$	1	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$	-2	$-$	0	$+$	$\sqrt{5}$	$+$	2	$+$	$+\infty$
y'	$\to 1$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\nearrow$	$\to 3$
y''	$\to 0$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$-\infty$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$\bigcap$	$-\infty$	$\bigcap$	$\to 0$
	асим.		max		min				max		min		асим.

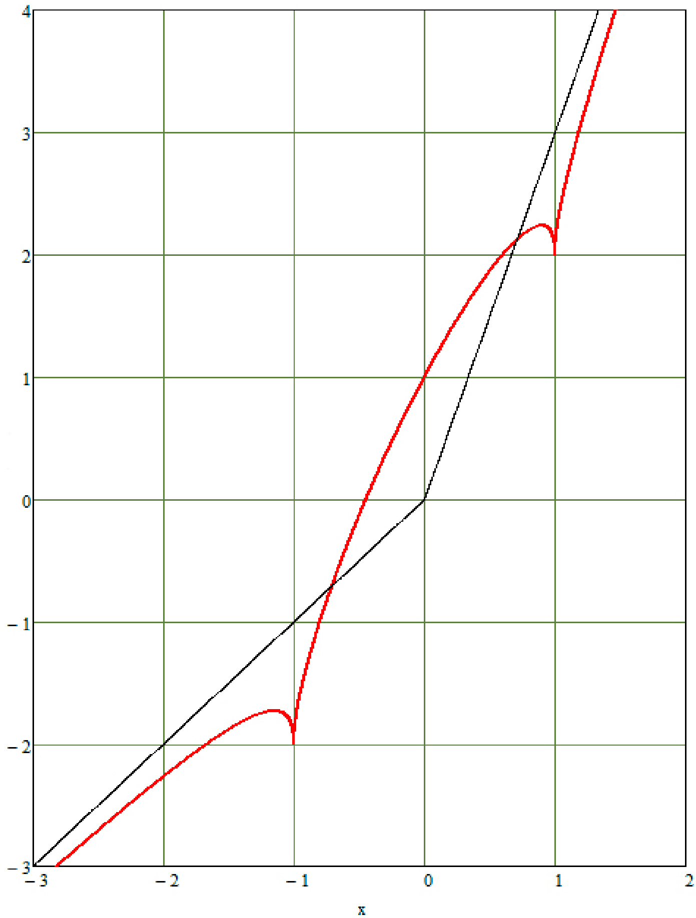

Рис. 11. График функции $y = 2x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

Пример 7.7. Исследовать функцию $y = (2x+5)e^x$ и построить ее график.

1°. *Область определения*: поскольку операции, использованные для записи формулы функции, выполнимы для любых действительных x, то $X : x \in (-\infty, +\infty)$.

2°. *Область значений*: очевидно, что при $x \geq 0$ значение y неограничено велико. Если $x \leq 0$, то в силу $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5)e^x = 0$ и непрерывности данной функции для любых x, приходим к заключению о ее “ограниченности снизу”. При этом нижнюю границу области значений удобнее будет найти из условия стационарности, поскольку исследуемая функция не только непрерывна, но и имеет производную для любого значения x.

3°. Функция $y = (2x+5)e^x$ не обладает свойствами *четности, нечетности или периодичности.*

4°. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5)e^x = 0$, то график данной функции асимптотически приближается к оси Ox при x стремящемся к $-\infty$.

5°. *Промежутки знакопостоянства*: поскольку $e^x > 0\ \forall x$, то $y = 0$ при $x = -\frac{5}{2}$ и

$$y < 0, \text{ если } -\infty < x < -\frac{5}{2} \quad \text{и} \quad y > 0, \text{ если } -\frac{5}{2} < x < +\infty$$

6°. *Промежутки монотонности*: в рассматриваемом случае

$$y' = 2e^x + (2x+5)e^x = (2x+7)e^x \ ,$$

поэтому можно утверждать, что

$$y' = 0, \text{ если } x = -\frac{7}{2}\,,$$

то есть,

$$y' < 0, \text{ если } -\infty < x \le -\frac{7}{2} \quad \text{и} \quad y' > 0, \text{ если } -\frac{7}{2} < x < +\infty\ .$$

7°. *Направление выпуклости*: можно установить по знаку второй производной, которая в рассматриваемом случае равна

$$y'' = (2x+9)e^x.$$

То есть, при $-\infty < x < -\frac{9}{2}$ график функции имеет выпуклость вверх, а при $-\frac{9}{2} < x < +\infty$ – выпуклость вниз. Отсюда следует, что в точке $x = -\frac{7}{2}$ функция имеет локальный минимум, а в точке $x = -\frac{9}{2}$ – точку перегиба графика функции.

8°. *Сводная таблица свойств функции*

x	$-\infty$	$-$	$-\frac{9}{2}$	$-$	$-\frac{7}{2}$	$-$	$-\frac{5}{2}$	$+$	0	$+$	$+\infty$
y	$\to -0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	5	$+$	$+\infty$
y'	$\to -0$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
y''	$\to -0$	$\bigcap$	0	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$\bigcup$	$+\infty$
	асимптота		перегиб		min						

График функции $y = (2x + 5)e^x$ показан на рис. 12.

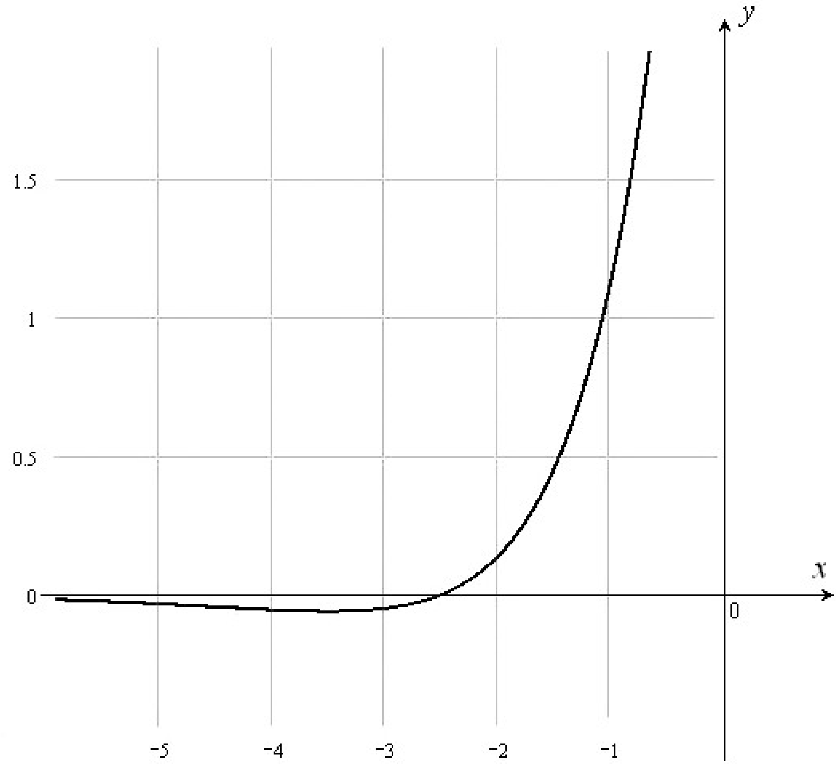

Рис. 12. График функции $y = (2x + 5)e^x$