Дифференциалы

При решении прикладных задач часто удается получить нужную информацию о локальных свойствах функции $y = f(x)$, используя лишь ее линейную аппроксимацию.

Другими словами, если удается исследуемую функцию представить в виде

$$y(x) = y(x_0) + A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\,,$$

то величину изменения значения $f(x)$ при малом отклонении x от x_0 можно оценить как

$$y(x) - y(x_0) \approx A(x_0)(x - x_0)\,.$$

В этом случае $A(x_0)(x-x_0)$ принято называть *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначать как dy и говорить, что функция $y = f(x)$ *дифференцируемая* в точке x_0 .

Если принять по определению, что дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, т.е. $dx = x - x_0$, то $dy = A(x_0)dx$. Иначе говоря, дифференциал dy можно рассматривать как функцию *двух независимых* переменных x_0 и dx, причем от dx эта функция зависит *прямо пропорционально.*

Можно показать (это — теорема), что $A(x_0) = f'(x_0)$ и будет верно равенство $dy = f'(x_0)dx$. Более того, для дифференцируемости функция $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная $f'(x_0)$.

Для двух дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ и произвольных константах λ и μ справедливы равенства

$$\begin{array}{rcl} d(\lambda f + \mu g) & = & \lambda df + \mu dg\,, \\ d(fg) & = & gdf + fdg\,, \\ d\left(\dfrac{f}{g}\right) & = & \dfrac{gdf - fdg}{g^2} \quad g \neq 0\,. \end{array}$$

Пусть производная $f'(x)$ дифференцируема на некотором интервале вещественной оси. Тогда, рассматривая $dy = f'(x)dx$ как функцию от x при фиксированном dx и используя в качестве нового приращения x то же самое значение dx , можно найти дифференциал от dy .

Этот новый дифференциал называют *вторым дифференциалом* для функции $f(x)$ и обозначают как d^2y .

Согласно данному определению верны равенства

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2\,,$$

что принято записывать в виде $d^2y = f''(x)dx^2$.

Рассуждая аналогично, для функций имеющих производную более высокого порядка можно ввести понятие дифференциала порядка n вида $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Следует иметь в виду важное обстоятельство (называемое *инвариантностью формы первого дифференциала*): формула $dy = f'(x)dx$ верна и в том случае, когда x является не независимой переменной, а некоторой функцией $x(t)$.

При $n > 1$ равенство $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$ верно только в случае, когда x независимая переменная. Например для второго дифференциала в случае $y = f(x(t))$ второй дифференциал находится по формуле

$$d^2y = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x\,.$$

Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Рассмотрим теперь методы исследования функции в малой окрестности некоторой точки, основанные на использовании значений ее производных. Основой этих методов являются следующие теоремы, называемые *теоремами о среднем.*

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$

1) **непрерывна на** $[a, b]$,
2) **имеет в каждой точке** (a, b) **конечную или определенного знака бесконечную производную,**
3) **и верно равенство** $f(a) = f(b)$,

то $\exists \xi \in (a, b)$ **такая, что** $f'(\xi) = 0$.

Заметим, что в условиях теоремы Ролля, среди точек, для которых $f'(\xi) = 0$, всегда имеется точка экстремума функции $f(x)$.

Задача 4.1 *Доказать, что между двумя действительными корнями алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами имеется корень его производной функции.*

Решение. Пусть $y(x) = P_n(x)$ алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами, у которого a и b — соседние действительные корни.

Функция $y(x) = P_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда по теореме Ролля найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $P_n'(\xi) = 0$. То есть, ξ есть корень производной от алгебраического многочлена.

Решение получено.

Теорема Лагранжа **Если функция** $f(x)$

1) непрерывна на $[a,b]$,

2) имеет в каждой точке (a,b) **конечную или определенного знака бесконечную производную,**

то $\exists \xi \in (a,b)$ **такая, что**

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Утверждение теоремы Лагранжа часто называют *формулой конечных приращений.*

Из теоремы Лагранжа следует, что, если $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то $f'(x)$ непрерывна в x_0.

Задача 4.2 *Доказать, что* $\forall x > 0 \;\; \exists \theta(x)$ *такое, что*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

причем $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \dfrac{1}{4}$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. По теореме Лагранжа, примененной для дифференцируемой функции $y = \sqrt{x}$ $x \in [x_0, x_0+1]$, имеем равенство $\sqrt{x_0+1} - \sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$. Положив $\xi = x_0 + \theta(x)$, получим

$$\sqrt{x_0+1} - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+\theta(x)}}$$

$$\sqrt{x_0+1} + \sqrt{x_0} = 2\sqrt{x_0+\theta(x)}\,.$$

Далее, возводя обе части равенства в квадрат, находим, что

$$\theta(x_0) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x_0^2+x_0} - x_0}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+x_0}+x_0}$$

Решение получено. и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \dfrac{1}{4}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

Теорема Коши **Если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$**

1) непрерывны на $[a,b]$,

2) имеют в каждой точке (a,b) конечные производные, причем $\phi'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in (a,b)$,

то $\exists \xi \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\phi(b)-\phi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

Из теоремы Коши следует полезное правило раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, называемое правилом Лопиталя.

Теорема Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1) **дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности,**
2) **функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$,**
3) **существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.**

Тогда верно равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, а для дифференцируемых и бесконечно малых в точке a функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Проиллюстрируем применение правила Лопиталя на следующих примерах.

Задача 4.3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

Задача 4.4. Найти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x - x^3}{x-3}$.

Решение. В данном случае мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, а, поскольку $(3^x - x^3)' = 3^x \ln 3 - 3x^2$ и $(x-3)' = 1 \neq 0$, то согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 3} \frac{3^x - x^3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{3^x \ln 3 - 3x^2}{1} = 27 \ln \frac{3}{e}\,.$$