Функция одной переменной

Напомним определение функции как специального способа описания связи между переменными величинами.

Определение 2.1. Будем говорить, что задана *функциональная зависимость* или, просто *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x, принадлежащему числовому множеству X, поставлено в соответствие **единственное** число y, принадлежащему числовому множеству Y.

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество Y - *областью ее значений.* Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением функции* или, просто, *функцией.*

Достаточно часто функцию задают только формулой соответствия. В этом случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область значений при этом принимается множество чисел, являющихся значениями функции соответствующие *всем возможным* значениям аргумента.

Приведем примеры использования этого определения.

Пример 2.1. 1) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Область определения: очевидно $X : \{\forall x \neq 0\}$ или, что то же самое,

$$\left\{(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)\right\}.$$

Область значений: оценку области значений данной функции выполним в два этапа. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых таких значений x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0 \text{ , или } \left(x - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0 \text{ , откуда } \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством

$$(-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ для всех } x > 0$$

имеем

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ для всех } x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $Y : \{(-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty)\}$.

2) $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

Область определения: находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{array} \right.$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \Big\{ (-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (-1, +\infty) \Big\} .$$

Область значений: область значений данной функции можно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1.) Рассмотрим формулу $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром. Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y - 2)x^2 + (3y - 2)x + (2y - 1) = 0 \, , \tag{1.1}$$

корни которого определяются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-(3y - 2) \pm \sqrt{D}}{2(y - 2)} \quad y \neq 2 \, ,$$

где дискриминант $D = (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1)$.

Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$(3y-2)^2 - 4(y-2)(2y-1) =$$

$$= y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5}-4] \bigcup [2\sqrt{5}-4, +\infty) \right\} .$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5}-4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5}-4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y, удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x+3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение $x = -\dfrac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5}-4] \bigcup [2\sqrt{5}-4, +\infty) \right\} .$$

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствую у нее свойства *периодичности* и свойства *четности*.

Определение 2.2. Функцию $y = f(x)$ будем называть *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 2.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x & \text{с периодом } T = 2\pi, \\ y = \cos 3x & \text{с периодом } T = \dfrac{2\pi}{3}, \\ y = \operatorname{tg} x & \text{с периодом } T = \pi. \end{array}$$

Определение 2.3. Пусть X – область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:

четной, если $\forall x \in X: \quad f(-x) = f(x)$,

нечетной, если $\forall x \in X: \quad f(-x) = -f(x)$,

Пример 2.3. Классификация функций по четности:

$y = x^2$ – четная,
$y = x^3$ – нечетная,
$y = \sin x$ – нечетная,
$y = \cos x$ – четная,
$y = 3^x$ – не является ни четной, ни нечетной.

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую их них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Предел функции и его свойства

Рассматривая значения некоторой функции $f(x)$ в малой окрестности точки $x = a$, в большом числе случаев можно заметить, что эти значения оказываются тем ближе к некоторому числу A, чем меньше значение x отличается от a. При этом величина A может отличаться от значения $f(a)$ и даже существовать в тех случаях, когда точка a не принадлежит области определения функции $f(x)$.

Примером может служить функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, которая не имеет никакого значения в точке $x = 0$, но определена в любой ее окрестности и значение которой тем меньше отличается от единицы, чем меньше абсолютная величина x.

Если такое число A существует, его называют *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, и данный факт символически обозначают как

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Приведем теперь строгие определения понятия предела функции.

Определение 2.4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если *для любой* числовой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к A, то есть выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если $\forall\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ : \ \{f(x_n)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

или же

Определение 2.5. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если *для любого* $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для *всех* x удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ справедливо $|\, f(x) - A \,| < \varepsilon$,

что символически записывается так:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : \ 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad \longrightarrow \quad |\, f(x) - A \,| < \varepsilon.$$

Определение 2.4 принято называть *определением предела функции по Гейне*, а определение 2.5 — *определением по Коши*. Имеет место теорема, утверждающая *эквивалентность* этих определений.

Важную роль также играют *отрицания* определений 2.4 и 2.5.

Отрицание 2.1. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если *найдется* числовая последовательность $\{x_n^*\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = a$ и $x_n^* \neq a$, а числовая последовательность $\{f(x_n^*)\}$ *не сходится* к A, то есть выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) \neq A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$, если $\exists\{x_n^*\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) \neq A$.

аналогично строится и

Отрицание 2.2. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если *найдется* $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ *существует* x_0 удовлетворяющее условию $0 < |x_0 - a| < \delta$, при котором $|\, f(x_0) - A \,| \geq \varepsilon_0$,

что символически записывается так:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \ \ \forall\delta > 0 : \quad \exists x_0 : \ 0 < |x_0 - a| < \delta \quad \longrightarrow \quad |\, f(x_0) - A \,| \geq \varepsilon_0.$$

Для того, чтобы установить, что предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a не существует, достаточно найти одну последовательность $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = a$ для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)$ не существует.

Или же построить две сходящиеся последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^* = a$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n^*)$.

В вычислительной практике нередко встречаются случаи, когда предельный переход к точке a выполняется только в ее *левой* или только в *правой* полуокрестности. Такие пределы называют *односторонними*. Первый случай принято обозначать как $x \to a - 0$, а второй случай — $x \to a + 0$.

Кроме того, если значение функции при предельном переходе остается больше A (*стремление сверху*), то величина предела обозначается как $A + 0$, а, если меньше A (*стремление снизу*), то как $A - 0$.

Наконец, отметим, что определения предела применимы не только когда a обозначает некоторое конечное число, но и могут быть модифицированы для случаев, в которых a является одним из следующих трех символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$. Также возможны варианты, когда A не является конечным числом, а принимает одно из символических значений ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

В следующей таблице приведены примеры обозначений различных видов предельных переходов и их формулировок в кванторах по Коши.

Обозначение	Формулировка
$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 7$	$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0:\ \ \forall x:\ 0 < x-3 < \delta_\varepsilon \longrightarrow \lvert\, f(x) - 7\,\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5-0$	$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0:\ \ \forall x:\ x > \delta_\varepsilon \quad\longrightarrow\quad -\varepsilon < f(x) - 5 < 0$
$\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = -\infty$	$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0:\ \ \forall x:\ -\delta_\varepsilon < x-4 < 0 \quad\longrightarrow\quad f(x) < -\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq -1$	$\exists\varepsilon_0 > 0\,\forall\delta > 0:\ \exists x_0:\ 0 < \lvert x_0 - 2\rvert < \delta \longrightarrow \lvert\, f(x_0) + 1\,\rvert \geq \varepsilon_0$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty$	$\exists\varepsilon_0 > 0\,\forall\delta > 0:\ \ \exists x_0:\ x_0 < -\delta \quad\longrightarrow\quad \lvert\, f(x_0)\,\rvert < \varepsilon_0$

Подчеркнем: предел функции при x стремящемся к a является *локальной* числовой характеристикой функции (так же, как и $f(a)$ — ее значение), то есть относящейся к точке a.

Для одной и той же точки значение функции и величина её предела, равно как и их существование, независимы друг от друга: они могут существовать одновременно и быть равными или не равными друг другу, и также могут не существовать, как вместе, так и по отдельности. Поясним это следующими примерами.

Пример 2.4. Найти, используя определение 2.4, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Возьмем произвольную числовую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, тогда n-й член последовательности $\{f(x_n)\}$ будет иметь вид $\dfrac{2x_n}{x_n^2+1}$. Найдем ее предел, пользуясь известными нам свойствами пределов числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^2+1} =$$

$$\frac{2\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)+1} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 3+1} = \frac{3}{5}\,.$$

Нетрудно заметить, что функция $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ определена (имеет значение) для любого конечного x, в том числе и для $x = 3$. В рассматриваемом случае $f(3) = \dfrac{2\cdot 3}{3^2+1} = \dfrac{3}{5}$, то есть значение функции и ее предел в точке $x = 3$ совпадают.

Однако, если рассмотреть поведение этой же функции при x стремящимся к ∞, то мы получим иной случай. С одной стороны, функция $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ не определена, то есть не имеет никакого значения при $x = \infty$. Но, с другой стороны, для $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n}{x_n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2}{1+\dfrac{1}{x_n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\dfrac{1}{x_n^2}} = 0 \cdot 2 = 0 \, .$$

Итак, эта функция при $x \longrightarrow \infty$ имеет предел, равный 0, то есть $f(x) \longrightarrow 0$, но не имеет никакого значения при $x = \infty$.

Пример 2.5. Рассмотрим функцию, называемую *сигнатурой числа,* обозначаемую как $y = \operatorname{sgn} x$ и определяемую формулой (см. рис.1)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

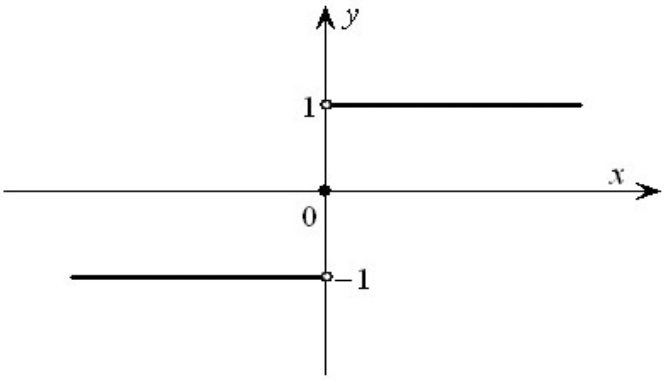

Рис. 1. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Эта функция при $x = 0$ имеет нулевое значение, то есть $\operatorname{sgn} 0 = 0$, однако предел $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Действительно, возьмем две числовые последовательности с $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = -\dfrac{1}{n}$. Они обе имеют своим пределом число 0. Но, по определению сигнатуры,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} y_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1,$$

а это противоречит определению 2.4, поскольку значение предела $\operatorname{sgn} x_n$ должно быть *одинаковым для всех* последовательностей $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Наконец, возможно, что у функции в некоторой точке есть неравные друг другу, как значение, так и предел. Примером может служить функция $y = |\operatorname{sgn} x|$, значение которой в нуле есть 0, а предел равен 1.

Также возможен случай, когда у функции в некоторой точке нет значения и не существует предел. Используя отрицание определения предела функции по Гейне, убедимся, что такая ситуация имеет место для $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x = 0$.

Действительно, рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, у которых

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \qquad \text{и} \qquad y_n = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Обе эти последовательности бесконечно малые и для них верны предельные равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$. Значит, по отрицанию определения предела по Гейне $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Свойства пределов функций аналогичны свойствам пределов последовательностей. Приведем основные из них, предполагая, что, используемые в формулировках, пределы существуют.

1°. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

2°. $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

3°. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

4°. Если, кроме того $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$.

5°. Аналог теоремы “о двух милиционерах”: если для всех x, принадлежащих некоторой окрестности точки a, верно $f(x)\geq h(x)\geq g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$.

Применение определений предела функции 2.4 и 2.5 (также как и в случае числовых последовательностей) затруднено тем, в них используется значение предела A.

Этого недостатка лишено необходимое и одновременно достаточное условие существования конечного предела функции, называемое *критерием Коши* и формулируемого в виде следующей теоремы.

Критерий Коши. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного ε существовало положительное число δ_ε такое, что для любых $x_1 \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon)$ и $x_2 \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon)$, выполнялось неравенство $|\, f(x_1) - f(x_2)\,| < \varepsilon$.

В кванторах критерий Коши имеет формулировку

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x_1 \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon) \text{ и } x_2 \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon) \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad |\, f(x_1) - f(x_2)\,| < \varepsilon\,.$$

Соответственно, отрицание критерия Коши, т.е. критерий случая, когда функция $F(x)$ не имеет конечного предела в точке a, может формулироваться так:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 : \exists\, x_{10} \in (a-\delta, a+\delta) \text{ и } x_{20} \in (a-\delta, a+\delta) \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad |\, f(x_{10}) - f(x_{20})\,| \geq \varepsilon_0\,.$$

Пример 2.6. При помощи отрицания критерия Коши доказать, что $y = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет конечного предела в точке $x = 0$.

Действительно,

$$\exists\, \varepsilon_0 = 1\ \forall \delta > 0 : \text{при} \quad k \geq \left[\frac{1}{2\pi\delta}\right] + 1$$

$$\exists \quad x_{10} = \frac{1}{2\pi k} \in (-\delta, \delta) \quad \text{и} \quad x_{20} = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k} \in (-\delta, \delta) \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad |\, f(x_{20}) - f(x_{10})\,| = |\,1 - 0\,| = 1 = \varepsilon_0\,.$$

Понятие предела функции может быть использовано для построения, полезных в вычислительных процедурах, аппроксимаций элементарных функций.

Например, если нас интересуют свойства исследуемой функции лишь в малой окрестности некоторой точки, то удобным инструментом аппроксимации является специальная функция $o(x)$, называемая «о-малой».

Определение 2.6. Функция $o(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a = 0$ и для нее справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x)}{x} = 0\,.$

Заметим, что конкретный вид функции $o(x)$ особой роли не играют.

Ниже приведены примеры построения с помощью $o(x)$ аппроксимаций некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned}
(1+x)^r &= 1 + rx + o(x),\\
e^x &= 1 + x + o(x),\\
\sin x &= 1 + x + o(x^2),\\
\cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}\,x^2 + o(x^3),\\
\operatorname{tg} x &= x + o(x^2),\\
\ln(1+x) &= x + o(x),\\
\arcsin x &= x + o(x^2).
\end{aligned}$$

Определение 2.7. Функция $f(x)$ называется *эквивалентной* в точке x_0 функции $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 1$. Эквивалентность принято обозначать так: $f(x) \sim g(x)$.

О функции $f(x)$ говорят, что она есть $O(g(x))$ в точке x_0, если существует число $ > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \le C$.

Для эквивалентности функций $f(x)$ и $g(x)$, например, в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x) + o(x)$ при $x \to x_0$.

При вычислении пределов эквивалентные функции можно заменять одну на другую.

Наконец, для решения задач полезными оказываются так называемые «замечательные пределы» функций:

1) *Первый* замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) *Второй* замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ .$$

Нахождение пределов функций. Раскрытие неопределенностей

Как и для задачи нахождения предела числовой последовательности, при поиске пределов функций сочетание использования свойств пределов и набора «замечательных пределов» позволяет в ряде случаев выполнять «раскрытие неопределенностей», основные из которых:

$$\text{“}0\cdot\infty\text{”}\ ,\quad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}\ ,\quad \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\ ,\quad \text{“}\infty-\infty\text{”}\ ,\quad \text{“}1^{\infty}\text{”}\ .$$

Продемонстрируем соответствующие приемы на следующих примерах.

Пример 2.7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$.

В этой задаче необходимо раскрыть неопределенность вида “$\frac{0}{0}$”.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12}\ .$$

Пример 2.8 Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{(2x+1)^2}$.

Здесь имеет место неопределенность вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{3}{4}\,.$$

Пример 2.9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

Тип неопределенности в этом примере – "$\infty-\infty$".

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}-x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}=$$

теперь мы имеем дело с неопределенностью вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$" – разделим числитель и знаменатель на x :

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}\,.$$

В ряде случаев для использования значений “замечательных” пределов оказывается целесообразным выполнить замену переменной величины.

Пример 2.10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Для раскрытия неопределенности вида “$\dfrac{0}{0}$” в этой задаче удобно ввести новую переменную $t=5x$, которая будет очевидно стремиться к нулю, когда x стремится к нулю. Поэтому, в силу первого “замечательного” предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\left(\dfrac{t}{5}\right)}=\lim_{t\to 0}5\cdot\frac{\sin t}{t}=5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=5\cdot 1=5\ .$$

Пример 2.11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Данная задача приводит к необходимости раскрытия неопределенности типа "1^{∞}". Выполним замену переменной, положив $t=-\dfrac{x}{3}\Rightarrow x=-3t$. Подставляя, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-3}=$$

$$=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}.$$

Непрерывность функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва

Определение 2.8. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке области определения* $x = a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Если это условие не выполнено, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *разрыв в точке* $x = a$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то для любой числовой последовательности $x_n \longrightarrow a$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

а, значит, если $f(x)$ непрерывна и в точке $x = g(a)$, где $g(x)$ другая непрерывная в точке $x = a$ функция, то

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a)), \tag{2.1}$$

Определение 2.9. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на некотором числовом множестве*, если она непрерывна в *каждой* точке этого множества. Функция $f(x)$ называется *разрывной на некотором числовом множестве*, если она не не является непрерывной *хотя бы в одной* из точек этого множества.

Пример 2.12. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $X : (-\infty, +\infty)$, а функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна как на $X : (-\infty, 0)$, так и на $X : (0, +\infty)$, но разрывна на $X : ((-\infty, +\infty))$.

Определение 2.10. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *устранимый разрыв* в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, когда точка $x = a$ принадлежит области определения функции $f(x)$, то точка $x = a$ называется *неустранимой точкой разрыва* функции $f(x)$.

Пример 2.11. Исследовать на непрерывность и выполнить классификацию ее точек разрыва функций:

1) $y = \operatorname{sgn} x$.

У данной функции точка разрыва $x = 0$ неустранимая, так как предел в этой точке не существует (см. рис. 1).

2) $y = |\operatorname{sgn} x|$.

Для этой функции точка разрыва $x = 0$ устранимая, так как предел в этой точке существует, $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, но не равен значению функции: $|\operatorname{sgn} 0| = 0 \neq 1$.

3)

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a \quad , & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна $\forall x$, если $a = 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и имеет в $x = 0$ устранимую точку разрыва $\forall a \neq 1$.

4)

$$y = \frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$$

Эта функция имеет в $x = 1$ устранимую точку разрыва, а в $x = 2$ – неустранимую.

Действительно, если преобразовать запись данной функции к виду $y = \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x-2}$, то для $x = 1$, в силу "первого замечательного предела", существует предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = 1 \cdot \frac{1}{-1} = -1,$$

в то время как в точке $x = 2$, хотя $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \sin 1$, но $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ – не существует, и мы имеем разрыв неустранимого типа.

Использование свойства непрерывности во многих случаях позволяет упростить процедуру раскрытия неопределенностей при нахождении пределов функций.

Пример 2.13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Данная задача приводит к неопределенности типа "$\dfrac{0}{0}$". Для ее раскрытия выполним, приняв во внимание непрерывность логарифмической функции и «второй замечательный предел», следующие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1\ .$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке (a,b) и имеет значения на концах отрезка, совпадающие с односторонними пределами, то

1) $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

2) Существуют $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ такие, что

$$f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

3) Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in [A,B] \exists c \in [a,b]$ такое, что $f(c) = C$.

4) Если функция $f(x)$ строго монотонна на $[a,b]$, то она имеет обратную функцию, и притом также строго монотонную.

Заметим, что эти свойства могут не выполняться для функций непрерывных на интервале. Например, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,1)$, но она неограничена на этом интервале.

Функция, определенная на отрезке и имеющая соответствующее множество значений в виде отрезка, может не быть непрерывной. Такова, например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \in [-1,0], \\ x+1 & \text{при} \quad x \in \quad (0,1]. \end{cases}$$