

Функция одной переменной

Напомним определение функции как специального способа описания связи между переменными величинами.

Определение 2.1. Будем говорить, что задана *функциональная зависимость* или, просто *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x , принадлежащему числовому множеству X , поставлено в соответствие **единственное** число y , принадлежащему числовому множеству Y .

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество Y - *областью ее значений*. Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением функции* или, просто, *функцией*.

Достаточно часто функцию задают только формулой соответствия. В этом случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область значений при этом принимается множество чисел, являющихся значениями функции соответствующие *всем возможным* значениям аргумента.

Приведем примеры использования этого определения.

Пример 2.1. 1) $y = x + \frac{1}{x}$

Область определения: очевидно $X : \{\forall x \neq 0\}$ или, что то же самое,

$$\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}.$$

Область значений: оценку области значений данной функции выполним в два этапа. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых таких значений x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0, \text{ или } \left(x - 2\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0, \text{ откуда } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством

$$(-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ для всех } x > 0$$

имеем

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ для всех } x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $Y : \{(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\}$.

$$2) y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Область определения: находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{cases}$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \{(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)\}.$$

Область значений: область значений данной функции можно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1 .) Рассмотрим формулу $y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром. Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y - 2)x^2 + (3y - 2)x + (2y - 1) = 0, \quad (1.1)$$

корни которого определяются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-(3y - 2) \pm \sqrt{D}}{2(y - 2)} \quad y \neq 2,$$

где дискриминант $D = (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1)$.

Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$\begin{aligned} & (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1) = \\ & = y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \cup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5} - 4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5} - 4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y , удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x + 3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение $x = -\frac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \cup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} .$$

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствию у нее свойства *периодичности* и свойства *четности*.

Определение 2.2. Функцию $y = f(x)$ будем называть *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 2.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{aligned} y = \sin x & \quad \text{с периодом } T = 2\pi, \\ y = \cos 3x & \quad \text{с периодом } T = \frac{2\pi}{3}, \\ y = \operatorname{tg} x & \quad \text{с периодом } T = \pi. \end{aligned}$$

Определение 2.3. Пусть X – область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:

$$\begin{aligned} &\text{четной, если } \forall x \in X : f(-x) = f(x), \\ &\text{нечетной, если } \forall x \in X : f(-x) = -f(x), \end{aligned}$$

Пример 2.3. Классификация функций по четности:

$$\begin{aligned} y = x^2 & \quad - \text{ четная,} \\ y = x^3 & \quad - \text{ нечетная,} \\ y = \sin x & \quad - \text{ нечетная,} \\ y = \cos x & \quad - \text{ четная,} \\ y = 3^x & \quad - \text{ не является ни четной, ни нечетной.} \end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую их них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Предел функции и его свойства

Рассматривая значения некоторой функции $f(x)$ в малой окрестности точки $x = a$, в большом числе случаев можно заметить, что эти значения оказываются тем ближе к некоторому числу A , чем меньше значение x отличается от a . При этом величина A может отличаться от значения $f(a)$ и даже существовать в тех случаях, когда точка a не принадлежит области определения функции $f(x)$.

Примером может служить функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, которая не имеет никакого значения в точке $x = 0$, но определена в любой ее окрестности и значение которой тем меньше отличается от единицы, чем меньше абсолютная величина x .

Если такое число A существует, его называют *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , и данный факт символически обозначают как

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Приведем теперь строгие определения понятия предела функции.

Определение 2.4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A , то есть выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если $\forall \{x_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a : \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

или же

Определение 2.5. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$,

что символически записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 2.4 принято называть *определением предела функции по Гейне*, а определение 2.5 — *определением по Коши*. Имеет место теорема, утверждающая *эквивалентность* этих определений.

Важную роль также играют *отрицания* определений 2.4 и 2.5.

Отрицание 2.1. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если найдется числовая последовательность $\{x_n^*\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ и $x_n^* \neq a$, а числовая последовательность $\{f(x_n^*)\}$ не сходится к A , то есть выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, если $\exists \{x_n^*\} \rightarrow a : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq A$.

аналогично строится и

Отрицание 2.2. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует x_0 удовлетворяющее условию $0 < |x_0 - a| < \delta$, при котором $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$,

что символически записывается так:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 : \quad \exists x_0 : 0 < |x_0 - a| < \delta \quad \longrightarrow \quad |f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Для того, чтобы установить, что предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a не существует, достаточно найти одну последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*)$ не существует.

Или же построить две сходящиеся последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* = a$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n^*)$.

В вычислительной практике нередко встречаются случаи, когда предельный переход к точке a выполняется только в ее *левой* или только в *правой* полукрестности. Такие пределы называют *односторонними*. Первый случай принято обозначать как $x \rightarrow a - 0$, а второй случай — $x \rightarrow a + 0$.

Кроме того, если значение функции при предельном переходе остается больше A (*стремление сверху*), то величина предела обозначается как $A + 0$, а, если меньше A (*стремление снизу*), то как $A - 0$.

Наконец, отметим, что определения предела применимы не только когда a обозначает некоторое конечное число, но и могут быть модифицированы для случаев, в которых a является одним из следующих трех символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$. Также возможны варианты, когда A не является конечным числом, а принимает одно из символических значений ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

В следующей таблице приведены примеры обозначений различных видов предельных переходов и их формулировок в кванторах по Коши.

Обозначение	Формулировка
$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 7$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < x - 3 < \delta_\varepsilon \rightarrow f(x) - 7 < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5-0$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : x > \delta_\varepsilon \rightarrow -\varepsilon < f(x) - 5 < 0$
$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : -\delta_\varepsilon < x - 4 < 0 \rightarrow f(x) < -\varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq -1$	$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_0 : 0 < x_0 - 2 < \delta \rightarrow f(x_0) + 1 \geq \varepsilon_0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \infty$	$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_0 : x_0 < -\delta \rightarrow f(x_0) < \varepsilon_0$

Подчеркнем: предел функции при x стремящемся к a является *локальной* числовой характеристикой функции (так же, как и $f(a)$ — ее значение), то есть относящейся к точке a .

Для одной и той же точки значение функции и величина её предела, равно как и их существование, независимы друг от друга: они могут существовать одновременно и быть равными или не равными друг другу, и также могут не существовать, как вместе, так и по отдельности. Поясним это следующими примерами.

Пример 2.4. Найти, используя определение 2.4, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Возьмем произвольную числовую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$, тогда n -й член последовательности $\{f(x_n)\}$ будет иметь вид $\frac{2x_n}{x_n^2 + 1}$. Найдем ее предел, пользуясь известными нам свойствами пределов числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n}{x_n^2 + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 + 1} = \\ &= \frac{2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) + 1} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что функция $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ определена (имеет значение) для любого конечного x , в том числе и для $x = 3$. В рассматриваемом случае $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5}$, то есть значение функции и ее предел в точке $x = 3$ совпадают.

Однако, если рассмотреть поведение этой же функции при x стремящимся к ∞ , то мы получим иной случай. С одной стороны, функция

$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ не определена, то есть не имеет никакого значения при $x = \infty$. Но, с другой стороны, для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n}{x_n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = 0 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Итак, эта функция при $x \rightarrow \infty$ имеет предел, равный 0, то есть $f(x) \rightarrow 0$, но не имеет никакого значения при $x = \infty$.

Пример 2.5. Рассмотрим функцию, называемую *сигнатурой числа*, обозначаемую как $y = \operatorname{sgn} x$ и определяемую формулой (см. рис.1)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

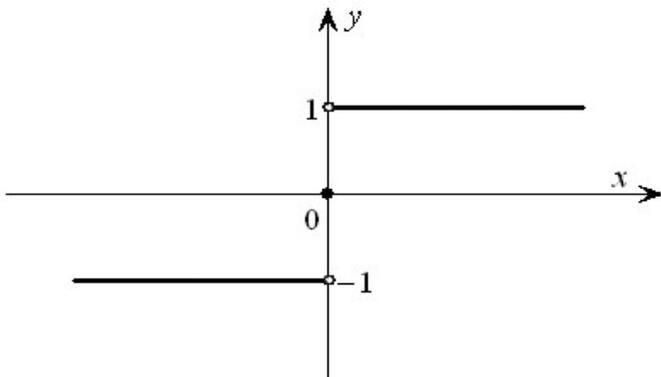


Рис. 1. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Эта функция при $x = 0$ имеет нулевое значение, то есть $\operatorname{sgn} 0 = 0$, однако предел $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Действительно, возьмем две

числовые последовательности с $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$. Они обе имеют своим пределом число 0. Но, по определению сигнатуры,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(-\frac{1}{n} \right) = -1,$$

а это противоречит определению 2.4, поскольку значение предела $\operatorname{sgn} x_n$ должно быть *одинаковым для всех* последовательностей $\{x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Наконец, возможно, что у функции в некоторой точке есть неравные друг другу, как значение, так и предел. Примером может служить функция $y = |\operatorname{sgn} x|$, значение которой в нуле есть 0, а предел равен 1.

Также возможен случай, когда у функции в некоторой точке нет значения и не существует предел. Используя отрицание определения предела функции по Гейне, убедимся, что такая ситуация имеет место для $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$.

Действительно, рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, у которых

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обе эти последовательности бесконечно малые и для них верны предельные равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$. Значит, по отрицанию определения предела по Гейне $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

Свойства пределов функций аналогичны свойствам пределов последовательностей. Приведем основные из них, предполагая, что, используемые в формулировках, пределы существуют.

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$4^\circ. \text{Если, кроме того } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

5°. Аналог теоремы “о двух милиционерах”: если для всех x , принадлежащих некоторой окрестности точки a , верно $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

Применение определений предела функции 2.4 и 2.5 (также как и в случае числовых последовательностей) затруднено тем, в них используется значение предела A .

Этого недостатка лишено необходимое и одновременно достаточное условие существования конечного предела функции, называемое *критерием Коши* и формулируемого в виде следующей теоремы.

Критерий Коши. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного ε существовало положительное число δ_ε такое, что для любых $x_1 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)$ и $x_2 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)$, выполнялось неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

В кванторах критерий Коши имеет формулировку

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \text{ и } x_2 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) &\longrightarrow \\ \longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. & \end{aligned}$$

Соответственно, отрицание критерия Коши, т.е. критерий случая, когда функция $F(x)$ не имеет конечного предела в точке a , может формулироваться так:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_{10} \in (a - \delta, a + \delta) \text{ и } x_{20} \in (a - \delta, a + \delta) &\longrightarrow \\ \longrightarrow |f(x_{10}) - f(x_{20})| \geq \varepsilon_0. & \end{aligned}$$

Пример 2.6. При помощи отрицания критерия Коши доказать, что

$$y = \sin \frac{1}{x} \text{ не имеет конечного предела в точке } x = 0.$$

Действительно,

$$\exists \varepsilon_0 = 1 \forall \delta > 0 : \text{при } k \geq \left[\frac{1}{2\pi\delta} \right] + 1$$

$$\exists x_{10} = \frac{1}{2\pi k} \in (-\delta, \delta) \text{ и } x_{20} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \in (-\delta, \delta) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |f(x_{20}) - f(x_{10})| = |1 - 0| = 1 = \varepsilon_0.$$

Понятие предела функции может быть использовано для построения, полезных в вычислительных процедурах, аппроксимаций элементарных функций.

Например, если нас интересуют свойства исследуемой функции лишь в малой окрестности некоторой точки, то удобным инструментом аппроксимации является специальная функция $o(x)$, называемая «о-малой».

Определение 2.6. Функция $o(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a = 0$ и для нее справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Заметим, что конкретный вид функции $o(x)$ особой роли не играют.

Ниже приведены примеры построения с помощью $o(x)$ аппроксимаций некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1+rx+o(x), \\ e^x &= 1+x+o(x), \\ \sin x &= x+o(x^2), \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3), \\ \operatorname{tg} x &= x+o(x^2), \\ \ln(1+x) &= x+o(x), \\ \operatorname{arcsin} x &= x+o(x^2).\end{aligned}$$

Определение 2.7. Функция $f(x)$ называется *эквивалентной* в точке

x_0 функции $g(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 1$. Эквивалентность принято обозначать так: $f(x) \sim g(x)$.

О функции $f(x)$ говорят, что она есть $O(g(x))$ в точке x_0 , если существует число $\epsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C.$$

Для эквивалентности функций $f(x)$ и $g(x)$, например, в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x) + o(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

При вычислении пределов эквивалентные функции можно заменять одну на другую.

Наконец, для решения задач полезными оказываются так называемые «замечательные пределы» функций:

1) *Первый* замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) *Второй* замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Нахождение пределов функций. Раскрытие неопределенностей

Как и для задачи нахождения предела числовой последовательности, при поиске пределов функций сочетание использования свойств пределов и набора «замечательных пределов» позволяет в ряде случаев выполнять «раскрытие неопределенностей», основные из которых:

$$“0 \cdot \infty” , \quad “\frac{0}{0}” , \quad “\frac{\infty}{\infty}” , \quad “\infty - \infty” , \quad “1^\infty” .$$

Продemonстрируем соответствующие приемы на следующих примерах.

Пример 2.7. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$.

В этой задаче необходимо раскрыть неопределенность вида “ $\frac{0}{0}$ ”.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{12} .$$

Пример 2.8 Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{(2x + 1)^2}$.

Здесь имеет место неопределенность вида " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{(2x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2.9. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Тип неопределенности в этом примере – " $\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \end{aligned}$$

теперь мы имеем дело с неопределенностью вида " $\frac{\infty}{\infty}$ " – разделим числитель и знаменатель на x :

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}.$$

В ряде случаев для использования значений “замечательных” пределов оказывается целесообразным выполнить замену переменной величины.

Пример 2.10. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Для раскрытия неопределенности вида “ $\frac{0}{0}$ ” в этой задаче удобно ввести новую переменную $t = 5x$, которая будет очевидно стремиться к нулю, когда x стремится к нулю. Поэтому, в силу первого “замечательного” предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{5}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin t}{t} = 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 5 \cdot 1 = 5 .$$

Пример 2.11. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$.

Данная задача приводит к необходимости раскрытия неопределенности типа “ 1^∞ ”. Выполним замену переменной, положив $t = -\frac{x}{3} \Rightarrow x = -3t$. Подставляя, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-3} = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}. \end{aligned}$$

Непрерывность функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва

Определение 2.8. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке области определения* $x = a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Если это условие не выполнено, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *разрыв в точке* $x = a$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то для любой числовой последовательности $x_n \rightarrow a$ верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a).$$

а, значит, если $f(x)$ непрерывна и в точке $x = g(a)$, где $g(x)$ другая непрерывная в точке $x = a$ функция, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a)), \quad (2.1)$$

Определение 2.9. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на некотором числовом множестве*, если она непрерывна в *каждой* точке этого множества. Функция $f(x)$ называется *разрывной на некотором числовом множестве*, если она не является непрерывной *хотя бы в одной* из точек этого множества.

Пример 2.12. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $X : (-\infty, +\infty)$, а функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна как на $X : (-\infty, 0)$, так и на $X : (0, +\infty)$, но разрывна на $X : ((-\infty, +\infty))$.

Определение 2.10. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *устранимый разрыв* в точке $x = a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует, но $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Если же $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не существует, когда точка $x = a$ принадлежит области определения функции $f(x)$, то точка $x = a$ называется *неустранимой точкой разрыва* функции $f(x)$.

Пример 2.11. Исследовать на непрерывность и выполнить классификацию ее точек разрыва функций:

1) $y = \operatorname{sgn} x$.

У данной функции точка разрыва $x = 0$ неустраняемая, так как предел в этой точке не существует (см. рис. 1).

2) $y = |\operatorname{sgn} x|$.

Для этой функции точка разрыва $x = 0$ устранимая, так как предел в этой точке существует, $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, но не равен значению функции: $|\operatorname{sgn} 0| = 0 \neq 1$.

3)

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна $\forall x$, если $a = 1$, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и имеет в $x = 0$ устранимую точку разрыва $\forall a \neq 1$.

4)

$$y = \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$$

Эта функция имеет в $x = 1$ устранимую точку разрыва, а в $x = 2$ – неустранимую.

Действительно, если преобразовать запись данной функции к виду $y = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2}$, то для $x = 1$, в силу “первого замечательного предела”, существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = 1 \cdot \frac{1}{-1} = -1,$$

в то время как в точке $x = 2$, хотя $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \sin 1$, но

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ – не существует, и мы имеем разрыв неустранимого типа.

Использование свойства непрерывности во многих случаях позволяет упростить процедуру раскрытия неопределенностей при нахождении пределов функций.

Пример 2.13. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Данная задача приводит к неопределенности типа " $\frac{0}{0}$ ". Для ее раскрытия выполним, приняв во внимание непрерывность логарифмической функции и «второй замечательный предел», следующие преобразования

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(1 + x \frac{1}{x} \right) \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \frac{1}{x} \right) \right) = \ln e = 1 .$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке (a, b) и имеет значения на концах отрезка, совпадающие с односторонними пределами, то

- 1) $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.
- 2) Существуют $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$ такие, что

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

- 3) Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in [A, B] \exists c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$.
- 4) Если функция $f(x)$ строго монотонна на $[a, b]$, то она имеет обратную функцию, и притом также строго монотонную.

Заметим, что эти свойства могут не выполняться для функций непрерывных на интервале. Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но она неограничена на этом интервале.

Функция, определенная на отрезке и имеющая соответствующее множество значений в виде отрезка, может не быть непрерывной. Такова, например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [-1, 0], \\ x + 1 & \text{при } x \in (0, 1]. \end{cases}$$