

Линейные зависимости в линейном пространстве

Линейные операторы

Определение
8.1.1

Пусть *каждому* элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие *единственный* элемент y линейного пространства Λ^* . Тогда говорят, что задан *оператор* \hat{A} , действующий в Λ и имеющий значения в Λ^* , действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$ или $y = \hat{A}(x)$. При этом элемент y называется *образом* элемента x , а элемент x — *прообразом* элемента y .

Как и в § 5.2, операторы подразделяются на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subseteq \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$. В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будем предполагать, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение

8.1.2

Оператор называется *линейным*, если для любых $x, y \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства

$$1^\circ. \hat{A}(x + y) = \hat{A}x + \hat{A}y,$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x.$$

Пример

8.1.1

1°. В пространстве двумерных столбцов линейным оператором является правило

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

связывающее столбец-прообраз $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ со

столбцом-образом $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве непрерывных функций $f(\tau)$ линейным оператором является операция умножения такой функции на независимую переменную τ .

Действия с линейными операторами

Определение
8.2.1

Линейные операторы \hat{A} и \hat{B} называются *равными* (что обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$), если

$$\forall x \in \Lambda : \quad \hat{A}x = \hat{B}x.$$

Суммой линейных операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор \hat{C} (что символически обозначается равенством $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма
8.2.1

Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.

Доказательство.

Пусть $x, y \in \Lambda$ и λ, μ суть числа, а $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, тогда, в силу определений 8.1.2 и 8.2.1,

$$\begin{aligned} \hat{C}(\lambda x + \mu y) &= \hat{A}(\lambda x + \mu y) + \hat{B}(\lambda x + \mu y) = \\ &= \lambda \hat{A}x + \mu \hat{A}y + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{B}y = \\ &= \lambda \hat{A}x + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{A}y + \mu \hat{B}y = \\ &= \lambda(\hat{A}x + \hat{B}x) + \mu(\hat{A}y + \hat{B}y) = \\ &= \lambda \hat{C}x + \mu \hat{C}y. \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец полученной цепочки равенств, приходим к заключению о линейности оператора \hat{C} .

Лемма доказана.

Определение
8.2.2

Нулевым оператором \hat{O} называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого пространства.

Определение
8.2.3

Оператором, противоположным оператору \hat{A} , называется оператор, обозначаемый $\tilde{\hat{A}}$, ставящий каждому элементу x пространства Λ в соответствие элемент \tilde{x} (см. определение 7.1.1).

Из решения задачи 8.1.2 следует, что нулевой оператор линейный. Покажите самостоятельно, что оператор, противоположный любому линейному оператору, также линейный.

Лемма
8.2.2

Для любых линейных операторов \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= \hat{B} + \hat{A}, \\ (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} &= \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}), \\ \hat{A} + \hat{O} &= \hat{A}, \quad \hat{A} + \tilde{\hat{A}} = \hat{O}.\end{aligned}$$

Определение
8.2.4

Произведением числа λ на линейный оператор \hat{A} называется оператор (обозначаемый $\lambda\hat{A}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма
8.2.3

Для произведения числа на линейный оператор справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\hat{A} &= \alpha(\beta)\hat{A}, & 1\hat{A} &= \hat{A}, \\(\alpha + \beta)\hat{A} &= \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}, \\ \alpha(\hat{A} + \hat{B}) &= \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}.\end{aligned}$$

Теорема
8.2.1

Множество *всех* линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ , является *линейным пространством*.

Определение
8.2.5

Произведением (иногда *композицией* или *суперпозицией*) линейных операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор (обозначаемый как $\hat{A}\hat{B}$), ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**
8.2.2

$$\begin{aligned}(\hat{A}\hat{B})\hat{C} &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C}), & (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} &= \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}, \\ \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) &= \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}.\end{aligned}$$

Доказательство.

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов. Действительно, $\forall x, y \in \Lambda$ и любых чисел α, β :

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B}(\alpha x + \beta y) &= \hat{A}(\hat{B}(\alpha x + \beta y)) = \hat{A}(\alpha \hat{B}x + \beta \hat{B}y) = \\ &= \alpha \hat{A}(\hat{B}x) + \beta \hat{A}(\hat{B}y) = \alpha(\hat{A}\hat{B})x + \beta(\hat{A}\hat{B})y.\end{aligned}$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$(\hat{A}(\hat{B}\hat{C}))x = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

но, с другой стороны,

$$((\hat{A}\hat{B})\hat{C})x = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}x = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание 8.2.1. В общем случае произведение линейных операторов не обладает перестановочным свойством (или, иначе говоря, операторы *не коммутируют*), то есть $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение 8.2.6	Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется <i>коммутатором</i> операторов \hat{A} и \hat{B} .
-----------------------------	--

Коммутатор коммутирующих операторов есть нулевой оператор.

Задача 8.2.1 В линейном пространстве алгебраических многочленов вида $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ найти коммутатор для операторов:

\hat{A} , ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и

\hat{B} — оператора умножения независимой переменной на многочлен.

Решение. Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau) = \tau P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{A}\hat{B}P_n(\tau) = \hat{A}(\hat{B}P_n(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1} = \sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k,$$

$$\hat{B}\hat{A}P_n(\tau) = \hat{B}(\hat{A}P_n(\tau)) = \tau \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1} = \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k,$$

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau) &= \sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k - \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k = \\ &= P_n(\tau), \end{aligned}$$

Решение и, следовательно, линейные операторы \hat{A} и \hat{B} не коммутируют. получено.

В рассмотренной выше задаче 8.2.1 оказалось, что действие коммутатора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Для операторов, обладающих таким свойством, используют специальное наименование.

Определение
8.2.7

Оператор \hat{E} называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если *каждому* элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие *тот же самый* элемент, то есть

$$\hat{E}x = x \quad \forall x \in \Lambda.$$

Докажите самостоятельно, что $\forall \hat{A} : \hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A}$, а также линейность и единственность \hat{E} .

Определение
8.2.8

Оператор \hat{B} называется *обратным* для линейного оператора \hat{A} (обозначается \hat{A}^{-1}), если

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}.$$

Пример
8.2.1

В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha, \beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \frac{df}{d\tau}$ и оператор интегрирования с переменным верхним пределом $\hat{B}f = \int_{\alpha}^{\tau} f(u) du$ являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} f(u) du = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}f = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\tau} du = F(\tau) - f(\alpha) = f(\tau) = \hat{E}f.$$

Замечание 8.2.2. 1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор \hat{O} не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o \quad \forall x \in \Lambda$, тогда для любого \hat{A} имеет место $\hat{A}\hat{O}x = \hat{A}(Ox) = o$, и, следовательно, равенство $\hat{A}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком \hat{A} .

2°. Обратный оператор, если существует, то он единственный. (Покажите это самостоятельно, используя идею доказательства леммы 5.1.1.)

3°. Из условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение равенства $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$. Это имеет место, например, в пространстве многочленов вида $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ для пары операторов \hat{A} и \hat{B} , где \hat{B} есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор \hat{A} многочлену $P_n(\tau)$ ставит в соответствие многочлен $\sum_{k=1}^n \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и линейный оператор \hat{A} , имеющий образы в Λ^m с базисом $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Иначе говоря, \hat{A} является *отображением* вида $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$.

В § 7.2 показано, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \quad \text{то есть} \quad \|x\|_g = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T.$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение образа отображения $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности \hat{A} справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{A}g_i.$$

Приняв во внимание возможность и единственность в Λ^m разложения $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} f_k \quad \forall i = [1, n]$, с одной стороны, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i \right) f_k.$$

С другой стороны, если $\|y\|_f = \|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m\|^T$ — координатное представление элемента y в базисе $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, то имеет место равенство $y = \sum_{k=1}^m \eta_k f_k$.

Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису, получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i \quad \forall k = [1, m]. \quad (8.3.1)$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению их прообразов. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ в паре конкретных базисов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki} .

Определение
8.3.1

Матрица $\|\hat{A}\|_{fg}$ размера $m \times n$, i -м столбцом которой является координатное представление $\|\hat{A}g_i\|_f$, называется *матрицей линейного оператора \hat{A}* в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$.

В использованных обозначениях

$$\|\hat{A}\|_{fg} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

В матричной форме уравнения связи (8.3.1) координатных представлений образов и прообразов будут иметь вид

$$\|y\|_f = \|\hat{A}\|_{fg} \|x\|_g, \tag{8.3.2}$$

в чем легко убедиться, используя в (8.3.1) для столбцов *двухиндексную* форму записи: $\eta_{k1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_{i1} \quad \forall k = [1, m]$.

Теорема
8.3.1

Между множеством всех линейных операторов вида $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ и множеством всех матриц размера $m \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Действия с линейными операторами в матричной форме

Будем рассматривать далее оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$, то есть *линейное преобразование*, действующее в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n$, матрица которого квадратная, порядка n . Введенные в § 1.1 и § 5.1 операции с матрицами позволяют выполнять в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. Критерий равенства операторов: $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g$.

Действительно, согласно определению 8.2.1 условие $\hat{A} = \hat{B}$ означает, что $\hat{A}x = \hat{B}x \quad \forall x \in \Lambda^n$ или же в координатной форме в силу (8.3.2) $\|\hat{A}\|_g \|x\|_g = \|\hat{B}\|_g \|x\|_g \quad \forall x \in \Lambda^n$.

Но тогда по лемме 5.1.2 матрица $\|\hat{A}\|_g - \|\hat{B}\|_g$ нулевая и, следовательно, условие $\hat{A} = \hat{B}$ равносильно $\|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g$.

2°. Сложение операторов: $\|\hat{A} + \hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g$.

Действительно, из разложений $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}g_k \quad \forall i = [1, n]$ и

$\hat{B}g_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ki}g_k \quad \forall i = [1, n]$ следует, что

$$(\hat{A} + \hat{B})x = \hat{A}x + \hat{B}x = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}g_k + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}g_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_{ki} + \beta_{ki})g_k.$$

3°. Умножение числа на оператор: $\|\lambda\hat{A}\|_g = \lambda\|\hat{A}\|_g$.

Из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}g_k \quad \forall i = [1, n]$ для любого числа λ находим, что

$$(\lambda\hat{A})g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \hat{A}\left(\lambda \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}g_k\right) = \sum_{k=1}^n (\lambda\alpha_{ki})g_k.$$

4°. Произведение операторов: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g\|\hat{B}\|_g$.

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})g_i &= \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A} \sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \hat{A}(g_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} g_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki} \right) g_j = \sum_{j=1}^n \kappa_{ji} g_j, \end{aligned}$$

где $\kappa_{ji} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki}$, что совпадает с определением 5.1.1 для произведения матриц $\|\hat{A}\|_g$ и $\|\hat{B}\|_g$

5°. Обращение операторов: $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 8.2.8 следует, что $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$, и, принимая во внимание результат пункта 4°, получаем, что искомого матричное представление $\|\hat{A}^{-1}\|_g$ оператора \hat{A}^{-1} должно удовлетворять соотношениям

$$\|\hat{A}^{-1}\|_g \|\hat{A}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{E}\|_g,$$

то есть являться обратной матрицей к матрице $\|\hat{A}\|_g$.

Следствие 8.3.1 **Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ равна $n \times m$.**

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\left\| \hat{A} \right\|_{fg}$ — матрица линейного отображения $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ при замене базисов.

Пусть в пространстве Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\|G\|$, а в Λ^m — два базиса $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ и $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$ с матрицей перехода $\|F\|$. Найдем соотношение, связывающее $\left\| \hat{A} \right\|_{f'g'}$ и $\left\| \hat{A} \right\|_{fg}$. В этом случае справедлива

Теорема 8.3.2 Матрица линейного оператора $\left\| \hat{A} \right\|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\left\| \hat{A} \right\|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ соотношением

$$\left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} = \|F\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|G\|.$$

Доказательство.

По теореме 7.3.1 при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ компоненты элементов $x \in \Lambda^n$ — прообраза и $y \in \Lambda^m$ — образа при действии оператора \hat{A} в этих базисах связаны формулами перехода, то есть равенствами

$$\|x\|_g = \|G\| \|x\|_{g'} \quad \text{и} \quad \|y\|_f = \|F\| \|y\|_{f'},$$

где

$$\|x\|_g = \|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\|^T \quad \text{и} \quad \|x\|_{g'} = \|\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n\|^T$$

и аналогично

$$\|y\|_f = \|\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\|^T \quad \text{и} \quad \|y\|_{f'} = \|\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m\|^T.$$

При этом в рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотношениями

$$\|y\|_f = \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|x\|_g \quad \text{и} \quad \|y\|_{f'} = \left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} \|x\|_{g'},$$

и поскольку матрица перехода имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\|y\|_{f'} = \|F\|^{-1} \|y\|_f = \|F\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|x\|_g = \|F\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|G\| \|x\|_{g'}.$$

Но, с другой стороны, $\|y\|_{f'} = \left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} \|x\|_{g'}$, и мы приходим к равенству

$$\left(\left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} - \|F\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|G\| \right) \|x\|_{g'} = \|o\| \quad \forall x \in E^n,$$

из которого в силу произвольности столбца $\|x\|_{g'}$ и леммы 5.1.2 матрица, стоящая в круглых скобках, нулевая. Откуда следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие **Матрица линейного преобразования \hat{A} при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к другому базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ с матрицей перехода $\|S\|$ в Λ^n изменяется по правилу**

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|.$$

Следствие **Значение определителя матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса в Λ^n .**

Доказательство.

По следствию 8.3.2 $\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det \left(\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \right)$,
а в силу теоремы 6.2.4

$$\det \left(\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \right) = (\det \|S\|^{-1}) \left(\det \|\hat{A}\|_g \right) (\det \|S\|),$$

а $\det \|S\|^{-1} \cdot \det \|S\| = 1$, то окончательно получаем, что

$$\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det \|\hat{A}\|_g.$$

Следствие доказано.

Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия *функции*, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под областью значений линейного оператора \hat{A} будем понимать множество образов всех элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ .

Ответ на вопрос: «Что представляет собой область значений линейного оператора?» дает

Теорема 8.4.1 Пусть \hat{A} – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ . Тогда

1°. Множество элементов $\text{Im}\hat{A}$ есть *подпространство* в Λ .

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то $\dim \text{Im}\hat{A} = \text{rg} \left\| \hat{A} \right\|_g$.

Определение 8.4.1 Рангом линейного оператора \hat{A} в Λ^n называется размерность его области значений. Ранг линейного оператора \hat{A} обозначается как $\text{rg}\hat{A}$ (или $\text{rang}\hat{A}$).

Следствие 8.4.1 В Λ^n $\text{rg}\hat{A} = \text{rg}\|\hat{A}\|_g \leq n$ и не зависит от выбора базиса.

Следствие 8.4.2 Размерность области значений линейного оператора \hat{A} , действующего на некотором подпространстве Λ^* линейного пространства Λ , не превосходит $\dim \Lambda^*$.

Теорема 8.4.2 Ранг произведения линейных операторов \hat{A} и \hat{B} не превосходит ранга каждого из этих операторов.

Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например,

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Другой (помимо области значений и ранга) важной характеристикой линейного оператора \hat{A} является совокупность элементов x линейного пространства Λ , называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker \hat{A}$.

Определение 8.4.2	Ядро линейного оператора \hat{A} состоит из элементов $x \in \Lambda$, таких, что $\hat{A}x = o$.
----------------------	---

Теорема 8.4.4 Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\operatorname{rg} \hat{A} = r$, то $\ker \hat{A}$ есть подпространство в Λ^n и $\dim \ker \hat{A} = n - r$.

Доказательство.

Пусть в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ оператор \hat{A} имеет матрицу $\left\| \hat{A} \right\|_g = \|\alpha_{ij}\|$. По следствию 8.4.1 $\operatorname{rg} \left\| \hat{A} \right\|_g = r$ для любого базиса.

В координатной форме равенство $\hat{A}x = o$, то есть условие принадлежности некоторого элемента $x \in \Lambda^n$ с координатным представлением $\|x\|_g = \|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\|^T$ ядру оператора \hat{A} , в силу (8.3.2), имеет вид $\left\| \hat{A} \right\|_g \|x\|_g = \|o\|$ или

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 \quad \forall i = [1, n]. \quad (8.4.1)$$

При этом решения однородной системы линейных уравнений (8.4.1) образуют в своей совокупности линейное пространство.

Наконец, поскольку размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, то она, согласно теореме 6.7.1, равна $n - r$.

Теорема доказана.

Типы линейных отображений

Как было отмечено в § 8.1, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении. В § 7.5 было использовано понятие *взаимно однозначного отображения*, называемого иногда *биекцией*.

Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых инъективных и сюръективных отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение 8.4.3	Отображение $y = \hat{A}x$ $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется <i>инъективным</i> (или <i>инъекцией</i>), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2$.
----------------------	--

В случае инъекции множество всех значений оператора \hat{A} может не совпадать с Θ .

Определение 8.4.4	Отображение $y = \hat{A}x$ $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется <i>сюръективным</i> (или <i>сюръекцией</i>), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω .
----------------------	---

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω , но, вообще говоря, он не единственен.

В табл. 8.4.1 для сравнения приведены примеры отображений различных типов.

Таблица 8.4.1

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность — условия $\ker \hat{A} = \{o\}$.

Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема 8.4.5 Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.

Доказательство.

1°. Пусть в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ отображение $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ имеет матрицу $\left\| \hat{A} \right\|_{fg}$, причем $\text{rg} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} = m$.

Тогда система линейных уравнений $\left\| \hat{A} \right\|_{fg} \|x\|_g = \|y\|_f$ по теореме 6.6.1 (Кронекера – Капелли) имеет решение $\forall y \in \Lambda^m$, поскольку для расширенной матрицы этой системы ранг также равен m . Значит, для \hat{A} каждый образ имеет хотя бы один прообраз, и данное отображение сюръективно.

2°. Пусть $\text{rg} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} = n$. Тогда, по теореме 6.4.1 (Крамера), система линейных уравнений вида

$$\left\| \hat{A} \right\|_{fg} (\|x_1\|_g - \|x_2\|_g) = \|o\|_f$$

имеет единственное решение, которое очевидно тривиальное. Поэтому равные образы имеют равные прообразы, и, следовательно, рассматриваемое отображение инъективно.

Теорема доказана.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

В случае, когда линейный оператор \hat{A} является преобразованием в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, оказывается полезным дать уточняющее определение 8.3.1.

Определение 8.4.5	Квадратная, порядка n , матрица $\left\ \hat{A} \right\ _g$, столбцы которой есть координатные представления элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, называется <i>матрицей линейного преобразования \hat{A} в этом базисе</i> .
----------------------	---

Инвариантные подпространства и собственные векторы

<p>Определение 8.5.1</p>	<p>Подпространство Λ^* линейного пространства Λ называется <i>инвариантным</i> подпространством линейного оператора¹ \hat{A}, если $\forall x \in \Lambda^* \hat{A}x \in \Lambda^*$</p>
-------------------------------------	--

Пример
8.5.1

1°. Множество радиусов-векторов точек некоторой прямой на плоскости Oxy , проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора поворота на угол π этих радиусов-векторов вокруг оси Oz (см. рис. 8.1).

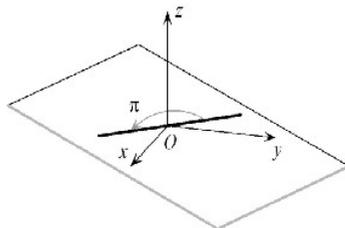


Рис. 8.1

2°. Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на (α, β) производную любого порядка, n -мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида $\{e^{\lambda_1\tau}, e^{\lambda_2\tau}, \dots, e^{\lambda_n\tau}\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — некоторые, попарно различные константы.

¹В этом параграфе речь пойдет только об операторах, являющихся преобразованиями.

Теорема 8.5.1 **Линейный оператор \hat{A} , заданный в линейном пространстве Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, имеет матрицу вида**

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|$$

тогда и только тогда, когда линейная оболочка подмножества первых r базисных элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ есть Λ^* — инвариантное подпространство оператора \hat{A} .

В приложениях важную роль играют определяемые ниже «собственные векторы» и «собственные значения» линейных преобразований.

Определение
8.5.2

Ненулевой элемент f называется *собственным вектором* линейного преобразования \hat{A} , если существует число λ , такое, что $\hat{A}f = \lambda f$.

Число λ в этом случае называется *собственным значением* \hat{A} , соответствующим (или отвечающему) собственному вектору f .

Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного преобразования \hat{A} , заданного в Λ^n , удалось найти n линейно независимых собственных векторов g_1, g_2, \dots, g_n , для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1, \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2, \quad \dots, \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n.$$

Если принять набор этих элементов за базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то данные соотношения можно рассматривать как *координатные разложения* образов базисных элементов:

$$\hat{A}g_k = 0g_1 + 0g_2 + \dots + \lambda_k g_k + \dots + 0g_n \quad \forall k = [1, n].$$

Согласно теореме 7.2.1, эти разложения единственны, поэтому, исходя из определения 8.3.1, можно утверждать, что матрица линейного преобразования в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\|\hat{A}\|_g = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{array} \right\|,$$

благодаря которому исследование свойств этого преобразования может существенно упроститься.

В том случае, когда удается найти базис, в котором матрица линейного преобразования имеет диагональный вид, данное преобразование принято называть *диагонализуемым*.

Вычисление собственных векторов и собственных значений линейного оператора в Λ^n

Выберем в Λ^n некоторый базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором координатное разложение f – собственного вектора линейного преобразования \hat{A} будет $f = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$, а линейное преобразование \hat{A} имеет матрицу

$$\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{ij}\|.$$

Пользуясь результатами, полученными в § 8.3, символическое равенство $\hat{A}f = \lambda f$ можно записать при помощи матричных операций в виде $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|_g$, или же в координатной форме:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \lambda \xi_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \lambda \xi_2, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \lambda \xi_n, \end{cases}$$

что по правилам действий с линейными операторами в координатах (см. §8.3) равносильно $\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g \|f\|_g = \|0\|_g$ или

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0, \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0. \end{cases} \tag{8.5.1}$$

Система уравнений (8.5.1) с неизвестными $\{\lambda, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ нелинейная, но если принять λ за параметр, то относительно неизвестных $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ она линейная и однородная.

Согласно определению 8.5.2 собственный вектор f должен быть *ненулевым*. Покажем, что этого можно добиться путем подбора специальных значений параметра λ .

Действительно, необходимым и достаточным условием существования *ненулевого* частного решения однородной системы n линейных уравнений с n неизвестными, согласно следствию 6.7.2, является *равенство нулю определителя ее основной матрицы*.

Поэтому условие, которому должны удовлетворять искомые значения λ , будет иметь вид

$$\det \|\alpha_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = 0, \quad (8.5.2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, или же

$$\det \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{array} \right\| = 0.$$

<p>Определение 8.5.3</p>	<p>Уравнение (8.5.2) называется <i>характеристическим уравнением</i>, а функция от λ, равная $\det \ \hat{A} - \lambda \hat{E}\ _g$, — <i>характеристическим многочленом</i> преобразования \hat{A}, действующего в Λ^n.</p>
-------------------------------------	--

Теорема 8.5.2 **Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса в Λ^n .**

Доказательство.

Заметим, что преобразование $\hat{A} - \lambda \hat{E}$, очевидно, линейное в силу линейности операторов \hat{A} и \hat{E} . Тогда, согласно следствию 8.3.3, определитель его матрицы не меняется при замене базиса.

Поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$: $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = \det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_{g'}$.

Теорема доказана.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , что следует из определения детерминанта 6.1.2 и формулы (8.5.2).

В итоге мы получаем универсальный $\forall \Lambda^n$ алгоритм вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов:

Решив характеристическое уравнение (8.5.2), из однородной системы уравнений (8.5.1) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы, найденным собственным значениям.

Примеры использования данного алгоритма в Λ^n иллюстрируют решения задач 8.6.1 и 8.6.2. В случае же линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее.

Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$ имеет бесконечно много собственных векторов (функций) $f(\tau) = \alpha e^{\lambda\tau}$ (где α – произвольная ненулевая константа) и собственных значений λ , удовлетворяющих дифференциальному уравнению вида $\frac{df}{d\tau} = \lambda f$.

Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 8.6.1 В комплексном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство.

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , то к нему применима *основная теорема высшей алгебры*, утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема доказана.

В случае вещественного линейного пространства теорема 8.6.1 неверна. Например, линейный оператор поворота в пространстве плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $\varphi \neq \pi k$ не имеет ни одного собственного вектора.

Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид (см. § 5.5):

$$\det \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0,$$

то есть $\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Откуда следует, что при $\varphi \neq \pi k$ вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

Для вещественного линейного конечномерного пространства оказывается справедливой

Теорема 8.6.2 **В вещественном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.**

Доказательство.

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (8.5.1) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ с $\beta \neq 0$. Тогда, решив систему (8.5.1), получим соответствующий ему комплексный собственный вектор $f = u + iv$, где u и v — элементы Λ^n , представляемые вещественными n -компонентными столбцами.

Покажем теперь, что u и v линейно независимые. Допустим противное: $u = \kappa v$. Тогда из соотношения $\hat{A}f = \lambda f$ имеем $\hat{A}(\kappa + i)v = \lambda(\kappa + i)v$ или $\hat{A}v = \lambda v$, откуда следует вещественность λ , что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

С другой стороны, опять-таки из $\hat{A}f = \lambda f$ имеем

$$\hat{A}(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$$

или, в силу линейности \hat{A} ,

$$\hat{A}u + i\hat{A}v = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v).$$

Тогда по определению равенства комплексных чисел получаем, что

$$\begin{cases} \hat{A}u = \alpha u - \beta v, \\ \hat{A}v = \beta u + \alpha v. \end{cases}$$

Но это и означает, что \hat{A} имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с двумерной линейной оболочкой элементов u и v , поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi u + \eta v) &= \xi \hat{A}u + \eta \hat{A}v = \xi(\alpha u - \beta v) + \eta(\beta u + \alpha v) = \\ &= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)v \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача 8.6.1 *Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования \hat{A} , действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей*

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.1°. Рассмотрим сначала случай, когда \hat{A} действует в комплексном линейном пространстве. Будем искать собственные значения по формулам (8.5.1) – (8.5.2). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

То есть из трех собственных значений одно $\lambda_1 = 1$ – вещественное, а два $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$ – комплексные.

2°. Найдем соответствующие им собственные векторы. Для $\lambda = 1$ по формулам (8.5.2) имеем

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

где $\begin{vmatrix} \varphi_{(1)1} & \varphi_{(1)2} & \varphi_{(1)3} \end{vmatrix}^T$ – координатное представление собственного вектора $f_{(1)}$, отвечающего $\lambda = 1$.

Очевидным набором элементарных преобразований приводим полученную систему уравнений к упрощенному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Откуда получаем, что собственный вектор, отвечающий $\lambda = 1$, представим как

$$\|f_{(1)}\| = \begin{vmatrix} \varphi_{(1)1} \\ \varphi_{(1)2} \\ \varphi_{(1)3} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

3°. Пусть теперь $\lambda = i$, тогда систему линейных уравнений (8.5.1)

$$\begin{vmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

можно упростить, разделив обе части первого уравнения на $1 + i$. Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\begin{vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить как линейно зависимое. Заменяя затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\begin{vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & -1+3i & -2i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Полагая значение свободного неизвестного ξ_3 равным числу $-1 - 3i$, находим второй собственный вектор:

$$\|f_{(2)}\| = \begin{vmatrix} \varphi_{(2)1} \\ \varphi_{(2)2} \\ \varphi_{(2)3} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 2i \\ 2i \\ -1+3i \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий третьему собственному значению $\lambda_3 = -i$, имеет вид

$$\|f_{(3)}\| = \begin{vmatrix} \varphi_{(3)1} \\ \varphi_{(3)2} \\ \varphi_{(3)3} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} -2i \\ -2i \\ -1-3i \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

(Покажите самостоятельно, что комплексная сопряженность f_2 и f_3 не случайна, то есть если λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и отвечающие им собственные векторы f_2 и f_3 .)

5°. Если оператор \hat{A} действует в вещественном линейном пространстве, то согласно теореме 8.6.2 \hat{A} имеет собственный вектор $\|f_1\| = \|0\ 1\ 1\|^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболочкой элементов $u = \operatorname{Re}f_2$ и $v = \operatorname{Im}f_2$, то есть которое будет состоять из элементов вида

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \mu_1 \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\| + \mu_2 \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\| \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при необходимости искомое инвариантное подпространство может быть задано и как однородная система линейных уравнений, которая в данном примере имеет вид

$$\xi_1 - \xi_2 = 0$$

Решение

получено. (см., например, решение задачи 8.4.1).

Теорема 8.6.3 Совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного преобразования \hat{A} , дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ , является в Λ инвариантным подпространством преобразования \hat{A} .

Доказательство.

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых α и β , не равных нулю одновременно, имеем

$$\hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \hat{A}f_1 + \beta \hat{A}f_2 = \alpha \lambda f_1 + \beta \lambda f_2 = \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2),$$

что доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Определение 8.6.1 Подпространство, состоящее из собственных векторов линейного преобразования \hat{A} , отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным* (или просто *собственным*) подпространством линейного преобразования \hat{A} .

Теорема 8.6.4 **Всякое собственное подпространство линейного преобразования \hat{A} является также инвариантным подпространством линейного преобразования \hat{B} , если \hat{A} и \hat{B} коммутируют.**

Доказательство.

Пусть Λ^* — инвариантное собственное подпространство \hat{A} , то есть $\hat{A}f = \lambda f \quad \forall f \in \Lambda^*$. Тогда будет справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$, а в силу коммутативности и линейности \hat{A} и \hat{B} будет также верно и $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f) \quad \forall f \in \Lambda^*$.

Последнее условие означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^* \quad \forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* — инвариантное подпространство оператора \hat{B} .

Теорема доказана.

Теорема 8.6.5 Собственные векторы линейного преобразования, отвечающие *различным* собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство.

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой.

Пусть имеются m линейно независимых собственных векторов f_1, f_2, \dots, f_m линейного преобразования \hat{A} , отвечающих *различным* собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Покажем, что в этом случае будет линейно независим и $m+1$ собственный вектор $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$, если эти элементы также отвечают различным собственным значениям.

Предположим противное: существует нетривиальная и равная нулевому элементу линейная комбинация собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$, то есть такая, что

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = 0, \quad (8.6.1)$$

причем без ограничения общности можно считать, что $\kappa_{m+1} \neq 0$.

Подействуем оператором \hat{A} на обе части равенства (8.6.1), получим

$$\begin{aligned} \hat{A}(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}) &= \\ = \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \dots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (8.6.1) на λ_{m+1} и вычитая почленно результат этого умножения из равенства (8.6.2), получаем

$$\begin{aligned} \kappa_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) f_1 + \kappa_2 (\lambda_2 - \lambda_{m+1}) f_2 + \dots \\ \dots + \kappa_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) f_m = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы f_1, f_2, \dots, f_m линейно независимые, то мы приходим к заключению, что $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_m = 0$.

Но тогда из (8.6.1) следует $\kappa_{m+1} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов f_1, f_2, \dots, f_m следует линейная независимость элементов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$.

Теорема доказана.

Следствие 8.6.1 **Линейное преобразование \hat{A} в Λ^n может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем n собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.**

Теорема 8.6.6 **Если у линейного преобразования \hat{A} , действующего в Λ^n , есть n различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами, в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее главной диагонали расположены собственные числа оператора \hat{A} .**

Теорема 8.6.7 Пусть Λ^* — собственное подпространство в Λ^n линейного преобразования \hat{A} , отвечающее некоторому собственному значению λ_0 кратности k . Тогда $1 \leq \dim \Lambda^* \leq k$.

Доказательство.

Выберем в Λ^n базис $\{g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_{n-1}, g_n\}$ так, чтобы его первые $m = \dim \Lambda^*$ элементов принадлежали подпространству Λ^* .

В силу условия кратности собственного значения λ_0

$$\hat{A}g_i = \lambda_0 g_i \quad \forall i = [1, m].$$

Поэтому матрица $\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$ в этом базисе согласно определению 8.3.1 (см. § 8.3) будет иметь вид

$$\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{m+1,m+1} - \lambda & \dots & \alpha_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Откуда следует, что $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda)$.

При этом множители вида $(\lambda_0 - \lambda)$ могут содержаться также и в многочлене $P_{n-m}(\lambda)$, значит, $m \leq k$, где k — кратность λ_0 , корня характеристического многочлена $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$.

Условие $1 \leq \dim \Lambda^*$ очевидно верное, поскольку подпространство Λ^* содержит ненулевые собственные векторы.

Теорема доказана.

Таким образом, размерность собственного подпространства Λ^* , отвечающего собственному значению λ кратности k , может оказаться меньше k .

Теорема 8.6.8 **Линейное преобразование \hat{A} в Λ^n имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда оно не является взаимно однозначным.**

Доказательство.

Линейное преобразование \hat{A} имеет в Λ^n собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда его матрица вырожденная, то есть в любом базисе $\det \|\hat{A}\|_g = 0$.

Пусть в Λ^n координатный столбец образа связан с координатным столбцом прообраза

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из теоремы 6.4.1 (Крамера) следует, что для заданного координатного столбца элемента-образа $\|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n\|^T$ эта система линейных уравнений, у которой неизвестными являются компоненты столбца элемента-прообраза $\|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$, либо оказывается *несовместной* (элемент-прообраз не существует), либо будет иметь согласно следствию 6.7.1 *неединственное* решение (элемент-прообраз определяется неоднозначно).

Теорема доказана.

Определение 8.6.2 Степенью порядка $k \geq 2$ квадратной матрицы $\|Q\|$, обозначаемую как $\|Q\|^k$, называется произведение следующего вида: $\underbrace{\|Q\| \cdot \|Q\| \cdot \dots \cdot \|Q\|}_{k \text{ множителей}}$.
Будем также считать, что $\|Q\|^1 = \|Q\|$ и $\|Q\|^0 = \|E\|$.

Теорема 8.6.9 Матрица линейного преобразования \hat{A} в Λ^n является корнем характеристического уравнения (Гамильтона этого преобразования).
- Кэли)

Доказательство.

Докажем теорему в предположении, что собственные векторы преобразования \hat{A} образуют в Λ^n базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Пусть данное линейное преобразование в этом базисе имеет матрицу $\left\| \hat{A} \right\|_f$ и характеристическое уравнение вида

$\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda^k = 0$. Тогда в силу линейности \hat{A} для собственного вектора f , отвечающего собственному значению λ , имеем (см. задачу 8.5.2):

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \left\| \hat{A} \right\|_f^k \right) \|f\| = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\left\| \hat{A} \right\|_f^k \|f\| \right) = \\
& = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\left\| \hat{A} \right\|_f \left(\left\| \hat{A} \right\|_f \dots \left(\left\| \hat{A} \right\|_f \|f\| \right) \dots \right) \right) = \\
& = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\lambda^k \|f\|) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda^k \right) \|f\| = 0 \cdot \|f\| = \|o\|.
\end{aligned}$$

Но поскольку это соотношение верно для всех базисных векторов, то оно будет верно и для каждого элемента $x \in \Lambda^n$. Тогда из леммы 5.1.2 следует, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \left\| \hat{A} \right\|_f^k = \left\| \hat{O} \right\|_f.$$

Наконец, выполнив переход (с матрицей перехода $\|S\|$) к произвольному базису $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \alpha_k \left\| \hat{A} \right\|_g^k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\|S\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_f \|S\| \right)^k = \\
& = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\|S\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_f \|S\| \cdot \|S\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_f \|S\| \dots \|S\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_f \|S\| \right) = \\
& = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\|S\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_f^k \|S\| \right) = \|S\|^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \left\| \hat{A} \right\|_f^k \right) \|S\| = \\
& = \|S\|^{-1} \left\| \hat{O} \right\|_f \|S\| = \left\| \hat{O} \right\|_g.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Линейные функционалы

Рассмотрим специальный случай линейного оператора, когда его область значений содержится в одномерном линейном пространстве, изоморфном множеству вещественных чисел.

Такого рода зависимости, следуя классификации, введенной в § 5.2, следует относить к функционалам. Напомним данное ранее

Определение 8.7.1	Пусть <i>каждому</i> элементу x линейного пространства Λ поставлено в соответствие <i>однозначно</i> определяемое число, обозначаемое $f(x)$. Тогда говорят, что в Λ задан функционал $f(x)$.
-----------------------------	---

Пример
8.7.1

- 1°. В пространстве n -компонентных столбцов можно задать функционал, сопоставив столбцу $\|\xi_1 \xi_2 \dots, \xi_n\|^T$ число $\sum_{i=1}^n \varphi_i \xi_i$, где φ_i $i = [1, n]$ — некоторые фиксированные константы.
- 2°. В векторном геометрическом пространстве функционалом является длина вектора, то есть $f(\vec{r}) = |\vec{r}|$.
- 3°. В пространстве функций $x(\tau)$, определенных на $[-1, 1]$, функционалом является так называемая «дельта-функция Дирака», обозначаемая как $\delta(x(\tau))$, ставящая в соответствие каждой функции $x(\tau)$ ее значение в нуле, то есть число $x(0)$.
- 4°. В пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на (α, β) , функционалом является

$$f(x(\tau)) = \int_{\alpha}^{\beta} p(\tau)x(\tau) d\tau,$$

где $p(\tau)$ — некоторая непрерывная на (α, β) функция.

- 5°. В линейном пространстве квадратных матриц вида

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| \text{ функционалом является}$$

$$f(\|A\|) = \det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|.$$

Определение
8.7.2

Функционал $f(x)$ называется *линейным* функционалом (или линейной формой), если $\forall x, y \in \mathbb{R}$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Задача
8.7.1

Доказать, что в примере 8.7.1 функционалы 1°, 3° и 4° являются линейными, а функционалы 2° и 5° — нет.

Представление линейного функционала в Λ^n

Пусть в Λ^n дан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и пусть элемент $x \in \Lambda^n$ имеет координатное разложение $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и координатное представление $\|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$. Тогда для каждого линейного функционала $f(x)$ справедливы соотношения

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(g_i) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \xi_i.$$

Числа $\varphi_i = f(g_i) \quad \forall i = [1, n]$ принято называть *компонентами* (или *координатами*) линейного функционала $f(x)$ в данном базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Из этих равенств следует легко проверяемая

Теорема 8.7.1 **Каждый линейный функционал $f(x)$ в Λ^n в конкретном базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ имеет однозначно определяемую строку компонентов**

$$\|f\|_g = \|\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n\|,$$

а каждая строка $\|\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n\|$ в этом базисе определяет линейный функционал $f(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \xi_i$, или в матричном виде $f(x) = \|f\|_g \|x\|_g$.

Теорема 8.7.2 В Λ^n в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ компоненты координатных представлений линейного функционала

$$\|f\|_g = \|\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n\| \quad \text{и} \quad \|f\|_{g'} = \|\varphi'_1 \varphi'_2 \dots \varphi'_n\|$$

связаны соотношением $\varphi'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \varphi_i \quad \forall j = [1, n]$, где коэффициенты σ_{ij} суть элементы матрицы $\|S\|$ — перехода от первого базиса ко второму.

В матричной форме это утверждение имеет вид $\|f\|_{g'} = \|f\|_g \|S\|$.

Сопряженное (двойственное) пространство.

Поскольку линейные функционалы являются частным случаем линейных операторов, то для них можно ввести операции сравнения, сложения и умножения на число.

Теорема 8.7.3 Множество всех линейных функционалов, заданных в линейном пространстве Λ , является линейным пространством.

Определение 8.7.3	Линейное пространство линейных функционалов, заданных в Λ , называется <i>сопряженным</i> (или <i>двойственным</i>) пространству Λ и обозначается Λ^+ .
--------------------------	--

Теорема 8.7.4 Размерность пространства Λ^{n+} , сопряженного Λ^n , равна n .

Вторичное сопряженное (вторичное двойственное) пространство

Поскольку Λ^{n+} является n -мерным линейным пространством, то в нем так же, как и в Λ^n , возможно определять линейные функционалы и рассматривать их совокупность как новое линейное пространство Λ^{n++} , сопряженное к Λ^{n+} . Будем называть это пространство *вторичным сопряженным* для линейного пространства Λ^n .

Очевидно, что линейные пространства Λ^n , Λ^{n+} и Λ^{n++} n -мерные и, следовательно, изоморфны друг другу. Однако, можно показать, что для пространств Λ^n и Λ^{n++} существует особый изоморфизм, позволяющий не делать различия между этими пространствами.

Это также позволяет записывать связь между значениями линейных функционалов, действующих в Λ^n и Λ^{n+} , в следующем симметричном виде: $f(x) = x(f)$.