Линейное пространство

Определение линейного пространства

Определение 7.1.1

Множество Λ, состоящее из элементов x, y, $z, \ldots$, к которым применимы как понятия *равенства* (вида $x = y$), так и *не равенства* ($x \neq y$), называется *линейным пространством*, если

1°. Каждой паре элементов $x, y \in \Lambda$ поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, таким образом, что выполнены аксиомы
   - а) $x + y = y + x$;
   - б) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   - в) существует *нулевой* элемент o, такой, что $\forall x \in \Lambda$ имеет место $x + o = x$;
   - г) $\forall x \in \Lambda$ имеется *противоположный* элемент $\tilde{x}$, такой, что $x + \tilde{x} = o$.

2°. Для любого числа λ и $\forall x \in \Lambda$ существует такой принадлежащий Λ элемент, обозначаемый λx и называемый *произведением числа на элемент*, что выполнены аксиомы:
   - а) $\forall x \in \Lambda : \qquad 1\, x = x$;
   - б) $\forall x \in \Lambda$ и любых чисел λ и μ : $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

3°. Для операций сложения элементов и умножения числа на элемент $\forall x, y \in \Lambda$ и для любых чисел λ, μ выполнены аксиомы дистрибутивности:

а) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

б) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

`Замечание 7.1.1.` 1°. Под «числами» в аксиомах второй и третьей групп определения 7.1.1 подразумеваются действительные или комплексные числа.

2°. Первые четыре аксиомы равносильны требованию, чтобы Λ являлось абелевой группой относительно операции сложения (см. § 5.6).

`Пример 7.1.1` Линейным пространством (при условии введения операций стандартным образом) являются:

1°. Множество всех векторов в пространстве.

2°. Множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.

3°. Множество всех n-компонентных столбцов.

4°. Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n.

5°. Множество всех матриц одного размера $m \times n$.

6°. $C[\alpha, \beta]$ — множество всех функций, непрерывных на $[\alpha, \beta]$.

7°. Множество всех решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Задача 7.1.1 *Показать, что в общем случае множество радиусов-векторов точек в пространстве, принадлежащих плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d$, не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра d данное множество будет линейным пространством.*

Задача 7.1.2 *Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.*

Задача 7.1.3 *Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел $\mathbb{R}^+$?*

Решение. Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

1°. Пусть операции вводятся стандартным образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует, например, нулевой элемент.

2°. Если же операцию «сложения» определить как обычное умножение двух чисел, а «умножение числа λ на элемент x» определить как возведение положительного числа x в степень $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{«сложение } x+y\text{»} := x \cdot y \qquad x > 0, y > 0,$$
$$\text{«умножение } \lambda x\text{»} := x^{\lambda} \qquad x > 0, \lambda \in \mathbb{R},$$

то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число 1.

Решение получено.

Из аксиоматики линейного пространства следуют теоремы.

Теорема 7.1.1 **В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.**

Теорема 7.1.2 $\forall x \in \Lambda$ **имеет место равенство** $0x = o$**.**

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (1+0)x = 1x + 0x = x + 0x\,.$$

Прибавляя к обеим частям равенства $x = 0x + x$ элемент $\tilde{x}$, противоположный элементу x, в силу $x + \tilde{x} = o$ получаем, что $0x = o$.

Теорема доказана.

Теорема 7.1.4 $\forall x \in \Lambda$ **противоположным элементом служит элемент** $\tilde{x} = (-1)x$**.**

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства и в силу теорем 7.1.2—7.1.3 имеем

$$o = 0x = (1-1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x\,.$$

Данное равенство и означает, что противоположный к x элемент имеет вид $(-1)x$.

Теорема доказана.

Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве

Определение 7.2.1	1°. Выражение $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейного пространства Λ. 2°. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейного пространства Λ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = o$. 3°. Элементы линейного пространства называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = o$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Лемма 7.2.1 **Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.**

Лемма 7.2.2 **Если некоторое подмножество множества элементов линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы.**

Доказательство.

Без ограничения общности можно предположить, что линейно зависимое подмножество состоит их первых $j < k$ элементов множества $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i x_i = o$. Но это равенство можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i + \sum_{i=j+1}^{k} 0 \cdot x_i = o\,,$$

тогда из нетривиальности первой линейной комбинации, стоящей в левой части этого равенства, следует линейная зависимость набора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Лемма доказана.

Определение 7.2.2	*Базисом* в линейном пространстве Λ называется любой упорядоченный набор его n элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$, если 1) этот набор линейно независимый; 2) $\forall x \in \Lambda$ множество $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n, x \}$ линейно зависимое.

Определение 7.2.3	Линейное пространство Λ называется *n-мерным* и обозначается Λ^n, если в нем существует базис, состоящий из n элементов. В этом случае число n называется *размерностью* линейного пространства Λ^n и обозначается $\dim \Lambda^n$.

В общем случае линейное пространство может не иметь базиса. Таким свойством обладает, например, линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента, поскольку в нем нет ни одного линейно независимого элемента.

Однако базиса может не быть и в линейном пространстве, имеющем линейно независимые элементы.

Теорема 7.2.1 **Для каждого элемента линейного пространства** Λ^n *существует единственное* **представление в виде линейной комбинации базисных элементов.**

Доказательство.

Пусть в конечномерном линейном пространстве Λ^n заданы базис $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и произвольный элемент x. Тогда, по определению базиса, система элементов $\{ x, g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ линейно зависима, то есть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$\lambda_0 x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = o\,.$$

Покажите самостоятельно, что число $\lambda_0 \neq 0$, поскольку это противоречило бы линейной независимости базисных элементов. Поэтому

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right) g_i\,,$$

и существование разложения, таким образом, доказано.

Докажем теперь единственность разложения. Допустим, что существуют два различных разложения x по базису

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \qquad \text{и} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i\,.$$

Тогда, вычитая эти равенства почленно, получаем, что

$$o = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) g_i\,.$$

Поскольку линейная комбинация линейно независимых элементов может равняться нулевому элементу, только если она тривиальная, то $\xi_i = \eta_i \quad \forall i = [1, n]$. Но это и означает, что разложение элемента x по базису единственно.

Теорема доказана.

Т а б л и ц а 7.2.1

Линейное пространство	**Размерность**	**Пример базиса**
Множество всех векторов в пространстве	3	Любая упорядоченная некомпланарная тройка векторов
Множество всех n-компонентных столбцов	n	n столбцов вида $\left\lVert\begin{matrix}1\\0\\\dots\\0\end{matrix}\right\rVert,\ \left\lVert\begin{matrix}0\\1\\\dots\\0\end{matrix}\right\rVert,\ \dots,\ \left\lVert\begin{matrix}0\\0\\\dots\\1\end{matrix}\right\rVert$
Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n	$n+1$	Набор из $n+1$ одночлена вида $P_0(\tau)=1,\ P_1(\tau)=\tau,\ \dots, P_n(\tau)=\tau^n$
Множество всех матриц размера $m\times n$	$m\cdot n$	$m\cdot n$ всевозможных различных матриц размера $m\times n$, все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1
Множество всех функций $f(\tau)$, непрерывных на $[0,1]$	Базиса нет	
Множество решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными и с рангом основной матрицы, равным r	$n-r$	Нормальная фундаментальная система решений

Подмножества линейного пространства

Подпространство

Определение 7.3.1

Непустое множество Ω, образованное из элементов линейного пространства Λ, называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ

1) $x + y \in \Omega$,
2) $\lambda x \in \Omega$.

Пример 7.3.1

Подпространства линейного пространства:

1°. Множество радиусов-векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиусов-векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.

2°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n, есть подпространство в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

3°. В пространстве n-мерных столбцов совокупность частных решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными и с основной матрицей ранга r образует подпространство размерности $n - r$.

4°. Подпространством любого линейного пространства будет:

а) само линейное пространство;

б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

Определение 7.3.2	Пусть даны два подпространства Ω_1 и Ω_2 линейного пространства Λ. Тогда 1°. *Объединением* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, таких, что либо $x \in \Omega_1$, либо $x \in \Omega_2$. Объединение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cup \Omega_2$. 2°. *Пересечением* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, таких, что $x \in \Omega_1$ и $x \in \Omega_2$. Пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cap \Omega_2$. 3°. *Суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x = x_1 + x_2 \in \Omega$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 + \Omega_2$. 4°. *Прямой суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов x таких, что $x = x_1 + x_2 \in \Omega$ при условиях: $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Прямая сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Теорема 7.3.1 **Как сумма, так и пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 в Λ суть также подпространства в Λ.**

Теорема 7.3.2 **Размерность суммы подпространств Ω_1 и Ω_2 равна** $\dim\big(\Omega_1+\Omega_2\big)=\dim\Omega_1+\dim\Omega_2-\dim\big(\Omega_1\cap\Omega_2\big)$.

Доказательство.

1°. Пусть подпространство $\Omega_1\cap\Omega_2$ имеет размерность k и базис $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k \,\}$. Дополним этот базис элементами $\{\, g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_l \,\}$ до базиса в Ω_1 и элементами $\{\, g''_1,\, g''_2,\, \ldots,\, g''_m \,\}$ до базиса в Ω_2.

В этом случае каждый элемент может быть разложен по системе элементов:

$$\Big\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k,\, g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_l,\, g''_1,\, g''_2,\, \ldots,\, g''_m \,\Big\}\,.$$

2°. Покажем теперь, что набор элементов

$$\left\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k,\, g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_l,\, g''_1,\, g''_2,\, \ldots,\, g''_m \,\right\}$$

линейно независим в Λ. Рассмотрим некоторую, равную нулевому элементу, линейную комбинацию этих элементов:

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda'_i g'_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j + \sum_{p=1}^{m} \lambda''_p g''_p = o. \qquad (7.3.1)$$

Заметим, что по построению элемент

$$\tilde{x} = \sum_{p=1}^{m} \lambda''_p g''_p \quad \in \quad \Omega_2,$$

но, с другой стороны, этот же элемент в силу (7.3.1)

$$\tilde{x} = -\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda'_i g'_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \right) \quad \in \quad \Omega_1.$$

Это означает, что $\tilde{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ и, следовательно, в равенстве (7.3.1) все $\lambda'_i = 0 \ \forall i = [1, l] \qquad \lambda''_p = 0 \ \forall p = [1, m]$. А поскольку $\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k \,\}$ — базис в $\Omega_1 \cap \Omega_2$, то и все $\lambda_j = 0 \ \forall i = [1, k]$ и линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (7.3.1), тривиальная. Следовательно, $\left\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k,\, g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_l,\, g''_1,\, g''_2,\, \ldots,\, g''_m \,\right\}$ — линейно независимая система элементов.

3°. Из пункта 2° следует, что набор элементов

$$\left\{\, g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_k,\, g'_1,\, g'_2,\, \ldots,\, g'_l,\, g''_1,\, g''_2,\, \ldots,\, g''_m \,\right\}$$

является базисом в $\Omega_1 + \Omega_2$. Размерность подпространства при этом равна

$$\dim(\Omega_1 + \Omega_2) = k + l + m = (k + l) + (k + m) - k =$$

$$= \dim \Omega_1 + \dim \Omega_2 - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2)\,.$$

`Теорема доказана.`

Линейная оболочка набора элементов

Определение 7.3.3	Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов $\Big\{ x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \Big\}$ линейного пространства Λ называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается $L\Big\{ x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \Big\}$.

Пример 7.3.2 Множество многочленов степени не выше, чем n, является линейной оболочкой набора одночленов вида $\Big\{ 1,\, \tau,\, \tau^2 \ldots,\, \tau^n \Big\}$ в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций $f(\tau)$.

Пусть задан набор элементов $\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \right\} \subseteq \Lambda$, порождающих линейную оболочку $L\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \right\}$, тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ и справедлива

Теорема 7.3.3 **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке $L\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \right\}$, является в Λ** *подпространством размерности* m**, где** m **— максимальное число линейно независимых элементов в наборе** $\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \right\}$**.**

Доказательство.

1°. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для совокупности элементов вида $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ (в предположении, что λ_i суть произвольные числа) справедливы все аксиомы из определения 7.1.1, то есть рассматриваемая линейная оболочка является линейным пространством.

Доказательство.

2°. Пусть максимальное число линейно независимых элементов в наборе $\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \right\}$ равно $m \leq k$. Без ограничения общности можно считать, что этими элементами являются $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда

$$x_j = \sum_{i=m+1}^{k} \alpha_{ji} x_i \qquad \forall j = [1, m] \, ,$$

и любой элемент линейной оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

3°. Покажем теперь, что любой набор из l ($l > m$) элементов данной линейной оболочки будет линейно зависимым. Для этого выберем l элементов $y_1, y_2, \ldots, y_l$, принадлежащих линейной оболочке, и выразим их через элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$, получим

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ji} x_i \qquad \forall j = [1, l] \, .$$

Приравняем нулевому элементу произвольную линейную комбинацию выбранного набора $y_1, y_2, \ldots, y_l$:

$$\sum_{j=1}^{l} \mu_j y_j = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ji} x_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{l} \beta_{ji} y_j \right) x_i = o \, .$$

Поскольку элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно независимые, то коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ должны удовлетворять следующей однородной системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{l} \beta_{ji} y_j = 0 \qquad \forall i = [1, m] \, .$$

Пусть ранг основной матрицы этой системы равен r. Поскольку $r \leq m$, то она имеет в силу теоремы 6.7.1 $l - r \geq l - m > 0$ линейно независимых и следовательно, ненулевых решений. Принимая во внимание, что l и m суть не равные друг другу натуральные числа, получаем $l - m \geq 1$, то есть существует нетривиальная линейная комбинация элементов $y_1, y_2, \ldots, y_l$, равная o.

Теорема доказана.

Гиперплоскость

Определение 7.3.4 Множество Γ, образованное из элементов вида $x+x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ, а x — любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subseteq \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ.

Замечание 7.3.1. 1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.

2°. Если $\dim \Omega = k$, то говорят о k-мерной гиперплоскости.

Например, общее решение совместной *неоднородной* системы линейных уравнений с n неизвестными является гиперплоскостью в линейном пространстве n-компонентных столбцов.

Задача 7.3.1 *Показать, что если элементы x и y принадлежат гиперплоскости Γ, то ей будет принадлежать и элемент $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, где α –– любое число.*

Координатное представление элементов линейного пространства

Определение 7.4.1	Пусть $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ — базис в Λ^n. Тогда числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в формуле $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, g_i$ называются *координатами* элемента x в базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$.

Напомним, что в силу теоремы 7.2.1 элемент x линейного пространства Λ^n в базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ *однозначно* представляется n-компонентным столбцом

$$\|x\|_g = \|\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \,\|^{\mathrm{T}} ,$$

называемым *координатным представлением* или *координатным столбцом* элемента в этом базисе.

В Λ^n базис может быть выбран *не единственным* способом, и потому прежде всего необходимо установить правило изменения координат элемента линейного пространства при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса: «старый» $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ и «новый» $\{ g'_1, g'_2, \ldots, g'_n \}$ с соответствующими координатными разложениями

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, g_i \qquad \text{и} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \, g'_i$$

и координатными представлениями элемента x:

$$\|x\|_g = \| \, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \, \|^{\mathrm{T}} \;\; \text{и} \;\; \|x\|_{g'} = \| \, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n \, \|^{\mathrm{T}} .$$

Пусть, кроме того, известны разложения элементов «нового» базиса по элементам «старого»:

$$g'_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i \qquad \forall j = [1, n] . \tag{7.4.1}$$

Определение 7.4.2

Матрица $\|S\| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \dots & \sigma_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_{nn} \end{Vmatrix}$, j-й столбец которой состоит из коэффициентов координатного разложения j-го элемента «нового» базиса по элементам «старого», называется матрицей перехода от базиса $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ к базису $\{ g'_1, g'_2, \dots, g'_n \}$

Это определение является обобщением определения 1.8.2, и справедлива

Теорема 7.4.1

Координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ связаны соотношениями $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\xi'_j \quad \forall i = [1, n]$, называемыми *формулами перехода*, **где коэффициенты σ_{ij} – элементы матрицы перехода $\|S\|$.**

Доказательство.

В силу соотношений (7.4.1) будут справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, g_i = x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \, g'_i = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji} g_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} \xi'_i \right) g_j .$$

Значение суммы не зависит от того, каким символом обозначается индекс суммирования. Поэтому если в самой правой части заменить i на j, а j — на i, то мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, g_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \right) g_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(-\xi_i + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \right) g_i = o \, .$$

Но если линейная комбинация линейно независимых (в данном случае базисных) элементов равна нулевому элементу, то она тривиальная. Откуда получаем, что

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \qquad \forall i = [1, n] \, .$$

Теорема доказана.

Покажем, как операции с элементами линейного пространства выполняются в координатной форме.

Пусть в конкретном базисе в Λ^n имеем $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i$, тогда в силу определения базиса и аксиом линейного пространства справедливо следующее:

1°. Для *критерия сравнения*: два элемента в Λ^n равны (то есть $x = y$) тогда и только тогда, когда $\|x\|_g = \|y\|_g$.

2°. Для операции *сложения*: $\|x + y\|_g = \|x\|_g + \|y\|_g$.

3°. Для операции *умножения числа на элемент*: $\|\lambda x\|_g = \lambda \|x\|_g$.

Откуда следует, что элементы конечномерного линейного пространства не только могут представляться матрицами (столбцами), но и правила выполнения операций с этими элементами в координатах *совпадают с определением соответствующих матричных операций.*

Заключение о линейной зависимости или независимости некоторого набора элементов в Λ^n можно делать, применяя теорему 6.5.3 (о ранге матрицы) к матрице, столбцы которой суть координатные представления элементов этого набора.

Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства: множество многочленов $P_2(\tau)$ степени не выше, чем 2, и множество векторов трехмерного геометрического пространства.

Операции сложения многочленов и их умножения числа на многочлен выглядят следующим образом:

$$\left(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2\right)+\left(\eta_1+\eta_2\tau+\eta_3\tau^2\right)=(\xi_1+\eta_1)+(\xi_2+\eta_2)\,\tau+(\xi_3+\eta_3)\,\tau^2,$$
$$\lambda\left(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2\right)=(\lambda\xi_1)+(\lambda\xi_2)\,\tau+(\lambda\xi_3)\,\tau^2.$$

Те же операции с трехмерными векторами в координатной форме в свою очередь записываются так:

$$\left\|\begin{array}{c}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{array}\right\|+\left\|\begin{array}{c}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{array}\right\|,\qquad \lambda\left\|\begin{array}{c}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c}\lambda\xi_1\\ \lambda\xi_2\\ \lambda\xi_3\end{array}\right\|.$$

Сопоставляя эти записи, можно заключить, что природа данных множеств не играет роли, когда исследуются их характеристики, использующие только критерии равенства, операции сложения и умножения числа на элемент.

Отмеченное свойство линейных пространств носит название *изоморфизма*.

Определение 7.5.1	Два линейных пространства Λ_1 и Λ_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\hat{F} : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, такое, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ и $\forall x, y \in \Lambda_1$: $1^\circ.\ \hat{F}(x+y) = \hat{F}(x) + \hat{F}(y)$; $2^\circ.\ \hat{F}(\lambda x) = \lambda \hat{F}(x)$. Отображение $\hat{F}(x)$ называется *изоморфизмом* линейных пространств Λ_1 и Λ_2.

Напомним, что отображение $\hat{F}$ является взаимно однозначным (биективным), если разные элементы из Λ_1 имеют в Λ_2 разные образы (инъективность), а каждый элемент из Λ_2 является образом некоторого элемента из Λ_1 (сюръективность).

Теорема 7.5.1 (об изоморфизме) **Два линейных конечномерных пространства Λ_1 и Λ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.**

Доказательство.

1°. Пусть $\dim\Lambda_1 = \dim\Lambda_2$. Используя в качестве изоморфизма отображение, при котором каждому элементу из Λ_1 ставится в соответствие элемент из Λ_2, имеющий те же самые координаты, и используя правила операций с элементами в координатном представлении, приходим к заключению об изоморфности линейных пространств Λ_1 и Λ_2.

2°. Допустим теперь, что $n = \dim\Lambda_1 > \dim\Lambda_2 = m$, а пространства Λ_1 и Λ_2. изоморфны. Возьмем в Λ_1 некоторую линейную комбинацию n линейно независимых элементов, равную нулевому элементу. Эта линейная комбинация обязана быть тривиальной.

В пространстве Λ_2 эта же линейная комбинация образов выбранных элементов будет также равняться нулевому элементу, поскольку в силу определения 7.5.1 нулевой элемент переходит в нулевой элемент.

При этом образы выбранных элементов обязаны быть в Λ_2 линейно зависимыми (поскольку мы предположили, что $n > m$), и, следовательно, рассматриваемая линейная комбинация может быть нетривиальной. Это противоречит предположению о том, что $n > m$.

Аналогичные рассуждения в предположении, что $n < m$, также приводят к противоречию, и, следовательно, $n = m$.

Теорема доказана.

Пример 7.5.1 Изоморфизм одномерных пространств вещественных чисел $x \in \mathbb{R}$ и всех положительных чисел $y \in \mathbb{R}^+$ (с операциями, определенными в условии задачи 7.1.3) задается при помощи функций $y = e^x$ и $x = \ln y$.

Очевидным следствием теоремы 7.5.1 является изоморфизм любого линейного n-мерного пространства Λ^n и линейного пространства n-компонентных столбцов, позволяющий убедиться в наличии свойств элементов Λ^n, аналогичным свойствам столбцов, установленных в § 6.5–6.7.

Например, имеет место

Теорема 7.5.2 **Максимальное число линейно независимых элементов в любом конечном наборе элементов из Λ^n равно рангу матрицы, столбцы которой суть координатные представления элементов данного набора в некотором базисе.**

Пусть в Λ^n задан базис $\{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$, в котором координатное разложение элементов имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$. Тогда имеет место

Следствие 7.5.4 **Каждая *однородная* система m линейных уравнений с n неизвестными**

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i \quad \forall j = [1, m]$$

определяет некоторое подпространство Ω в Λ^n.

Доказательство.

Следует из того факта, что подпространство Ω в силу теоремы 6.7.2 является линейной оболочкой нормальной фундаментальной системы решений данной системы линейных уравнений, а Λ^n изоморфно линейному пространству n-компонентных столбцов $\| \xi_1 \, \xi_2 \, \dots \, \xi_n \|^{\mathrm{T}}$.

Следствие доказано.