Ранг матрицы

Согласно определению 6.1.2, детерминант является числовой характеристикой *квадратных* матриц.

Рассмотрим теперь матрицу $\|A\|$ размера $m \times n$. Пусть число k такое, что $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Выберем некоторым способом в $\|A\|$ k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную подматрицу минора порядка k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $k+1$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k (следствие 6.3.1).

Определение 6.5.1	Наибольший из порядков миноров матрицы $\|A\|$, отличных от нуля, называется *рангом матрицы* и обозначается $\mathrm{rg}\|A\|$.
Определение 6.5.2	Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором.*
Определение 6.5.3	Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными.*

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида

$$\|a_1\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\| , \quad \|a_2\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\| , \quad \cdots , \quad \|a_n\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|$$

и столбцы $\quad \|b\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\| , \quad \|o\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| .$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов

$$\|a_1\| , \ \|a_2\| , \ \dots , \|a_n\| ,$$

если существуют числа $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots, \ \lambda_n,$ такие, что $\quad \|b\| = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \|a_j\| .$

Теорема 6.5.1 (о базисном миноре) **Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Пусть ранг матрицы равен r. Без ограничения общности можно считать, что матрица базисного минора расположена в левом верхнем углу матрицы $\|A\|$.
Окаймим матрицу базисного минора фрагментами i-й строки и j-го столбца и рассмотрим определитель построенной матрицы

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ir} & \alpha_{ij} \end{array} \right\| ,$$

который равен нулю как минор порядка $r+1$ в матрице, имеющей ранг r.

2°. Разложив определитель Δ по последней строке, получим

$$\alpha_{i1}K_1 + \alpha_{i2}K_2 + \cdots + \alpha_{ir}K_r + \alpha_{ij}M = 0,$$

где $M \neq 0$ — базисный минор, а $K_1, \ldots, K_r$ – некоторые константы, *одинаковые* для любых i, то есть *для всего* j-го столбца. Следовательно,

$$\alpha_{ij} = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_r\alpha_{ir} \, , \quad \text{где} \quad \forall i: \ \ \lambda_i = -K_i/M \, .$$

Теорема доказана.

Определение 6.5.4

Столбцы $\|a_1\|,\ \|a_2\|,\ \dots,\|a_k\|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_k$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|a_j\| = \|o\|\ . \tag{6.5.1}$$

Столбцы $\|a_1\|,\ \|a_2\|,\ \dots,\|a_k\|$ будем называть *линейно независимыми*, если из равенства (6.5.1) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Лемма 6.5.1

Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Лемма 6.5.2 **Если в наборе столбцов есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этого набора также линейно зависимое.**

Теорема 6.5.2 **Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.**

Доказательство.

Доказательство необходимости.

Пусть определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю, то есть равный ему единственный минор порядка n нулевой, тогда ранг матрицы меньше n. По теореме о базисном миноре всякий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов и тогда по лемме 6.5.1 столбцы матрицы линейно зависимы.

Доказательство достаточности.

Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. По лемме 6.5.1 один из столбцов есть линейная комбинация остальных. Допустим, что этот столбец последний в матрице, то есть $\|a_n\| = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \|a_j\|$.

Умножим последовательно $\forall j = [1, n-1]$ j-й столбец на число λ_j и сложим все их. Вычитание полученной суммы из n-го столбца не изменит величины определителя, но поскольку при этом мы получим нулевой столбец, то определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Теорема 6.5.3 (о ранге матрицы) **Максимальное число линейно независимых столбцов в матрице равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Если ранг матрицы нулевой, то все ее элементы нулевые и среди них нет линейно независимых.
Пусть ранг матрицы равен $r > 0$. Рассмотрим новую матрицу, составленную из r базисных столбцов исходной матрицы. Она имеет ненулевой минор r-го порядка и, следовательно, ее столбцы линейно независимы.

2°. Выберем $k > r$ столбцов исходной матрицы и покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Построим из выбранных столбцов матрицу $\|A^*\|$. Ее ранг $r^* \leq r$, поскольку является частью матрицы $\|A\|$.
Следовательно, $r^* \leq r < k$ и в матрице $\|A^*\|$ есть, по крайней мере, один небазисный столбец, а тогда и столбцы матрицы $\|A\|$ линейно зависимы по лемме 6.5.2.

Теорема доказана.

Системы m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 & + & \alpha_{m2}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\xi_n & = & \beta_m . \end{array}\right. \qquad (6.6.1)$$

Она записывается в неразвернутом виде $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \quad i = [1, m]$ или же в матричной форме $\|A\|\|X\| = \|B\|$, где матрица $\|A\|$ размера $m \times n$ имеет компоненты α_{ij}, а столбцы $\|X\|$ и $\|B\|$ — соответственно компоненты $\xi_j \quad \forall j = [1, n]$ и $\beta_i \quad \forall i = [1, m]$.

Определение 6.6.1	Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ будем называть *частным решением* (или просто *решением*) системы линейных уравнений (6.6.1), если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество. Частное решение системы линейных уравнений (6.6.1) также может быть записано в виде столбца $$\|X^0\| = \| \ \xi_1^0 \ \xi_2^0 \ \ldots \ \xi_n^0 \ \|^{\mathrm{T}}.$$ Совокупность всех частных решений системы линейных уравнений (6.6.1) назовем *общим решением* системы (6.6.1).

Определение 6.6.2	Если система (6.6.1) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной* системой уравнений.

Определение 6.6.3	Матрица $\qquad \lVert A \rVert = \left\lVert \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\rVert$ называется *основной матрицей* системы (6.6.1), а матрица $\lVert A \vert B \rVert = \left\lVert \begin{array}{cccc\|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right\rVert$ называется *расширенной матрицей* этой системы.

Определение 6.6.4	Система (6.6.1) называется *однородной*, если $\beta_i = 0 \qquad \forall i = [1, m]\,,$ в противном случае — *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 6.6.1 (Кронекера - Капелли) **Для того чтобы система (6.6.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.**

Доказательство.

Доказательство необходимости.

Пусть существует решение системы (6.6.1) $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, тогда эту систему можно представить в виде следующего матричного равенства:

$$\xi_1\|a_1\| + \xi_2\|a_2\| + \ldots + \xi_n\|a_n\| = \|B\|\,,$$

где $\quad ||a_j\| = \|\alpha_{1j}\;\alpha_{2j}\ldots\alpha_{mj}\;\|^{\mathrm{T}} \qquad \forall j = [1, n].$

Поскольку в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов, образующих основную матрицу, то число линейно независимых столбцов основной и расширенной матриц будет одинаковым. Следовательно, по теореме 6.5.3 (о ранге матрицы) $\mathrm{rg}\|A\| = \mathrm{rg}\|A|B\|$.

Доказательство достаточности.

Пусть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен r. Без ограничения общности предположим, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы, но тогда по теореме 6.5.1 (о базисном миноре) имеет место равенство

$$\|B\| = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \|a_j\|\,,$$

которое можно переписать в виде

$$\|B\| = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \|a_j\| + \sum_{j=r+1}^{n} 0 \cdot \|a_j\|\,.$$

Однако последнее означает, что система (6.6.1) имеет решение $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-r}\}$, то есть она совместна.

Теорема доказана.

Фундаментальная система решений

В § 6.6 было показано, что факт совместности или несовместности системы (6.6.1) можно установить, сравнив ранги ее основной и расширенной матриц. Рассмотрим теперь случай, когда система (6.6.1) совместна и найдем все ее решения, то есть ее общее решение.

При выводе формулы общего решения системы (6.6.1) окажутся полезными следующие утверждения.

Лемма 6.7.1 **Любая линейная комбинация частных решений** *однородной* **системы (6.6.1) также является ее частным решением.**

Доказательство.

Пусть $\|x^p\| = \|\, \xi_1^p \, \xi_2^p \, \ldots \, \xi_n^p \,\|^{\mathrm{T}} \;\; \forall p = [1,k]$ — частные решения однородной системы, т.е. $\|A\|\|x^p\| = \|o\| \;\; \forall p = [1,k]$.

Рассмотрим столбец $\|y\| = \sum\limits_{p=1}^{k} \lambda_p \|x^p\|$. По правилам действий с матрицами для него справедливы равенства

$$\|A\|\|y\| = \|A\| \left(\sum_{p=1}^{k} \lambda_p \|x^p\| \right) = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p \Big(\|A\|\|x^p\| \Big) = \|o\| \, .$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7.2 **Сумма некоторого частного решения** *однородной* **системы (6.6.1) и некоторого частного решения** *неоднородной* **системы является частным решением** *неоднородной* **системы (6.6.1).**

Доказательство.

Пусть $\|x\|$ — частное решение однородной системы, а $\|y\|$ — некоторое частное решение неоднородной, то есть

$$\|A\|\|x\| = \|o\| , \qquad \|A\|\|y\| = \|b\| .$$

Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\|A\|\big(\|x\| + \|y\|\big) = \|A\|\|x\| + \|A\|\|y\| = \|o\| + \|b\| = \|b\| .$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7.3 **Разность двух некоторых частных решений** *неоднородной* **системы (6.6.1) является частным решением** *однородной* **системы (6.6.1).**

Доказательство.

Пусть $\|x\|$ и $\|y\|$ — частные решения неоднородной системы, то есть

$$\|A\|\|x\| = \|b\| , \qquad \|A\|\|y\| = \|b\| .$$

Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\|A\|\big(\|x\| - \|y\|\big) = \|A\|\|x\| - \|A\|\|y\| = \|b\| - \|b\| = \|o\| .$$

Лемма доказана.

Замечания. 1°. Из лемм 6.7.1—6.7.3. (см. следствие 6.7.1) вытекает, что

общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое (*любое*!) частное решение неоднородной,

и поэтому целесообразно вначале изучить вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

2°. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое тривиальным, решение, для которого все неизвестные имеют нулевое значение.

3°. Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде столбцов, то, используя понятие равенства, операции сложения и умножения на число для столбцов, а также лемму 6.7.1, можно ввести понятие *линейной зависимости решений* однородной системы линейных уравнений, аналогично определению 6.5.4.

Теорема 6.7.1

Однородная система линейных уравнений (6.6.1) имеет $n - \mathrm{rg}\|A\|$ линейно независимых частных решений.

Доказательство.

1°. Рассмотрим вначале совместную *неоднородную* систему (6.6.1):

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 & + & \alpha_{m2}\xi_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\xi_n & = & \beta_m \end{cases}$$

и предположим, что матрица базисного минора расширенной матрицы $\|A|b\|$, ранга r, расположена в левом верхнем углу последней.

По теореме 6.5.1 (о базисном миноре) последние $m-r$ уравнений являются линейными комбинациями первых r уравнений, и, следовательно, их можно отбросить, поскольку они будут тождественно удовлетворяться решениями первых r уравнений.

В оставшихся уравнениях перенесем в правые части слагаемые, содержащие неизвестные $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$, и получим т.н. *упрощенную* систему линейных уравнений, равносильную системе (6.6.1):

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i - \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \qquad i = [1, r] \,.$$

Неизвестные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ будем называть *основными* (*главными, зависимыми, базисными*), а неизвестные $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$ — *свободными* (*параметрическими, независимыми, небазисными*).

Присвоим свободным неизвестным некоторые конкретные значения $\xi_{r+1} = \mu_1, \xi_{r+2} = \mu_2, \ldots, \xi_n = \mu_{n-r}$ и рассчитаем по правилу Крамера (теорема 6.4.1) соответствующие им значения основных неизвестных:

$$\xi_j = \frac{1}{M} \det \left\| \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 - \sum\limits_{k=r+1}^{n} \alpha_{1k}\mu_{k-r} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 - \sum\limits_{k=r+1}^{n} \alpha_{2k}\mu_{k-r} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \beta_r - \sum\limits_{k=r+1}^{n} \alpha_{rk}\mu_{k-r} & \cdots & \alpha_{rr} \end{array} \right\| \tag{6.7.1}$$

$\uparrow$ – j-й столбец.

В формуле (6.7.1) $j = [1, r]$, а M — базисный минор.
Заметим, что из соотношений (6.7.1), положив, например, $\mu_k = 0 \quad \forall k = [1, n-r]$, можно найти частное решение неоднородной системы (6.6.1).

2°. Теперь рассмотрим *однородную* систему, заменив в (6.6.1) все $\beta_i \quad i = [1, m]$ нулями. По линейному свойству определителей (теорема 6.2.3) получаем выражения для значений основных неизвестных:

$$\begin{array}{ll} \xi_j = \sum\limits_{k=1}^{n-r} \kappa_{jk}\mu_k & \forall j = [1, r] \\ \xi_{r+i} = \mu_i & \forall i = [1, n-r]\,, \end{array} \tag{6.7.2}$$

где

$$\kappa_{jk} = \frac{1}{M} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1,r+k} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2,r+k} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & -\alpha_{r,r+k} & \cdots & \alpha_{rr} \end{Vmatrix}$$

$\uparrow$ – j-й столбец

$$j = [1, r], \quad k = [1, n-r].$$

Наконец, в матричной форме соотношения (6.7.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{rr} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \cdots \\ \xi_n \end{Vmatrix} \tag{6.7.3}$$

или

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \cdots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{rr} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_{n-r} \end{Vmatrix}.$$

3°. Полагая $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$, получим решение $\{\, \xi_{1(1)}, \xi_{2(1)}, \ldots, \xi_{r(1)}, 1, 0, \ldots, 0 \,\}$.
Аналогично, при $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$ найдем решение $\{\, \xi_{1(2)}, \xi_{2(2)}, \ldots, \xi_{r(2)}, 0, 1, \ldots, 0 \,\}$.
И, продолжая этот процесс, на последнем шаге при $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0 \ldots, \mu_{n-r} = 1$ найдем решение $\{\, \xi_{1(n-r)}, \xi_{2(n-r)}, \ldots, \xi_{r(n-r)}, 0, 0, \ldots, 1 \,\}$.
Полученные решения будем называть *нормальными фундаментальными решениями.*

4°. Покажем теперь, что $n-r$ построенных частных решений однородной системы уравнений (6.6.1) являются линейно независимыми. Действительно, записав эти решения как строки, получим матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{1(1)} & \xi_{2(1)} & \ldots & \xi_{r(1)} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \xi_{1(2)} & \xi_{2(2)} & \ldots & \xi_{r(2)} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1(n-r)} & \xi_{2(n-r)} & \ldots & \xi_{r(n-r)} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| \tag{6.7.4}$$

Заметим, что ее ранг, с одной стороны, не меньше, чем $n-r$, поскольку содержит ненулевой минор этого порядка, но, с другой стороны, не больше, чем число строк в этой матрице, равное $n - r$, и потому ранг в точности равен $n - r$, что доказывает линейную независимость построенных частных решений.

Теорема доказана.

Определение 6.7.1	*Фундаментальной системой решений* для *однородной* системы линейных уравнений (6.6.1) называется упорядоченная совокупность любых ее $n - \text{rg}\|A\|$ частных, линейно независимых решений, где n — число неизвестных системы (6.6.1), а $\|A\|$ — ее основная матрица.

Матрицу (6.7.4), которая определена только при $n > \text{rg}\|A\|$, принято называть *фундаментальной матрицей* однородной системы (6.6.1).

Теорема 6.7.2 **Каждое частное решение однородной системы (6.6.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.**

Доказательство.

Пусть дано $\| \, \xi_1 \, \xi_2 \, \ldots \, \xi_n \, \|$ — некоторое решение однородной системы (6.6.1). Используем это решение как первую строку в матрице размера $(n-r+1)\times n$

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_r & \xi_{r+1} & \xi_{r+2} & \ldots & \xi_n \\ \xi_{1(1)} & \xi_{2(1)} & \ldots & \xi_{r(1)} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \xi_{1(2)} & \xi_{2(2)} & \ldots & \xi_{r(2)} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1(n-r)} & \xi_{2(n-r)} & \ldots & \xi_{r(n-r)} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\| , \qquad (6.7.5)$$

остальные строки в которой суть нормальные фундаментальные решения. Ранг матрицы (6.7.5), с одной стороны, очевидно, не меньше, чем $n-r$.

С другой стороны, первые r столбцов этой матрицы являются линейными комбинациями (заданными соотношениями (6.7.3)) последних $n-r$ столбцов.

Действительно, эти соотношения, связывающие значения свободных и основных переменных, *одни и те же для всех строк* матрицы (6.7.5), и потому в этой матрице каждый из первых r столбцов есть линейная комбинация последних $n-r$. Значит, ранг матрицы не превосходит $n-r$ и, следовательно, равен в точности $n-r$.

Значит, по теореме 6.5.1 о базисном миноре, последние $n-r$ строк матрицы (6.7.5) суть базисные. Тогда первая строка матрицы (6.7.5) есть некоторая линейная комбинация остальных, и, следовательно, произвольное частное решение однородной системы (6.6.1) может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \ldots \\ \xi_n \end{array} \right\| = \lambda_1 \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \\ \ldots \\ \xi_{r(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \\ \ldots \\ \xi_{r(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{array} \right\| + \cdots + \lambda_{n-r} \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(n-r)} \\ \xi_{2(n-r)} \\ \ldots \\ \xi_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{array} \right\| ,$$

где $\lambda_k \quad k=[1,n-k]$ — произвольные константы.

Теорема доказана.

Следствие 6.7.1 **Общее решение неоднородной системы (6.6.1) может быть дано формулой**

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| = \lambda_1 \left\| \begin{matrix} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \\ \cdots \\ \xi_{r(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \right\| + \cdots + \lambda_{n-r} \left\| \begin{matrix} \xi_{1(n-r)} \\ \xi_{2(n-r)} \\ \cdots \\ \xi_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \xi_{1(0)} \\ \xi_{2(0)} \\ \cdots \\ \xi_{r(0)} \\ \xi_{r+1(0)} \\ \xi_{r+2(0)} \\ \cdots \\ \xi_{n(0)} \end{matrix} \right\| ,$$

где $\| \xi_{1(0)} \ \xi_{2(0)} \ \cdots \ \xi_{r(0)} \ \xi_{r+1(0)} \ \xi_{r+2(0)} \ \cdots \ \xi_{n(0)} \|^{\mathrm{T}}$ **является некоторым частным решением неоднородной системы (6.6.1), а числа** $\lambda_k \quad k = [1, n-k]$ **— произвольные константы.**

Доказательство.

Пусть $\| x^0 \|$ — некоторое *частное* решение *неоднородной* системы (6.6.1), а $\|x\|$ — ее *произвольное* решение.
Тогда по лемме 6.7.3 разность $\|y\| = \|x\| - \|x^0\|$ будет частным решением *однородной* системы для любого $\|x\|$.
С другой стороны, для любого частного решения *однородной* системы $\|y\|$ по лемме 6.7.2 имеем, что $\|y\|+\|x^0\|$ есть частное решение *неоднородной.*
Откуда заключаем, что утверждение доказываемого следствия справедливо.

Следствие доказано.

Иное, полезное для приложений условие совместности системы линейных уравнений, дает

Теорема 6.7.3 (Фредгольма) **Для того чтобы система (6.6.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы** *каждое* **решение** $\|y\| = \|\,\eta_1\,\eta_2\,\ldots\eta_m\,\|^{\mathrm{T}}$ **сопряженной системы** $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\|$ **удовлетворяло условию** $\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i = 0$ **(или в матричном виде** $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| = 0$ **).**

Доказательство.

Доказательство необходимости.

Пусть система уравнений (6.6.1) совместна, то есть для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\| = \|A\|\|x\|$. Тогда, вычисляя произведение $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|$ в предположении, что $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\|$, получаем

$$\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \big(\|A\|\|x\|\big)^{\mathrm{T}}\|y\| = \|x\|^{\mathrm{T}}\big(\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|\big) = \|x\|^{\mathrm{T}}\|o\| = 0\,.$$

Доказательство достаточности.

Пусть $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| = 0$ для любого решения системы линейных уравнений $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений

$$\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\| \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\| \\ \|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| = 0 \end{cases}$$

совпадают, и для этих систем максимальное число линейно независимых частных решений одинаково. Поэтому, согласно теоремам 6.7.1 и 6.7.2,

$$m - \mathrm{rg}\|A\|^{\mathrm{T}} = m - \mathrm{rg}\left\|\begin{matrix} A \\ b \end{matrix}\right\|^{\mathrm{T}} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{rg}\|A\|^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg}\left\|\begin{matrix} A \\ b \end{matrix}\right\|^{\mathrm{T}},$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\mathrm{rg}\|A\| = \mathrm{rg}\|A\,|\,b\,\|$, означающее в силу теоремы 6.6.1 (Кронекера – Капелли) совместность системы линейных уравнений (6.6.1).

Теорема доказана.

Элементарные преобразования матриц. Метод Гаусса

Практическое применение теорем 6.7.3 и 6.7.4 затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Определение же рангов основной и расширенной матриц независимо от поиска решений оказывается весьма нерациональной (с точки зрения расходования вычислительных ресурсов) процедурой. Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (6.6.1), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса.*

Суть этого метода заключается в приведении расширенной матрицы системы линейных уравнений к наиболее простому виду последовательностью так называемых *элементарных преобразований*, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений. Под «наиболее простым» видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем решения на каждом шаге процедуры лишь линейного уравнения *с одним* неизвестным. Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n$, имеющей верхнюю треугольную форму:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1,m-2} & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{1,m} & \alpha_{1,m+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,m-2} & \alpha_{2,m-1} & \alpha_{2,m} & \alpha_{2,m+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3,m-2} & \alpha_{3,m-1} & \alpha_{3,m} & \alpha_{3,m+1} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1,m-1} & \alpha_{m-1,m} & \alpha_{m-1,m+1} & \cdots & \alpha_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{m,m} & \alpha_{m,m+1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{array} \right\| .$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

— перестановка строк (перенумерация уравнений);
— перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);
— удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
— умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
— сложение строки с линейной комбинацией остальных строк, с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ранг ее матрицы) не изменится также и при любой комбинации элементарных операций с расширенной матрицей этой системы..

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида. Например:

— перестановка столбцов с номерами i и j матрицы $\|A\|$ размера $m\times n$ осуществляется путем ее умножения справа на матрицу $\|S_1\|$ размера $n \times n$, которая в свою очередь получается из единичной матрицы $\|E\|$ n-го порядка путем перестановки в последней i-го и j-го столбцов;

— умножение i-й строки матрицы $\|A\|$ на число $\lambda \neq 0$ осуществляется путем умножения слева на матрицу $\|S_2\|$, которая получается из единичной размера $m\times m$ матрицы $\|E\|$ путем замены в последней i-го диагонального элемента (равного единице) на λ;

— сложение строк с номерами i и j матрицы $\|A\|$ осуществляется путем ее умножения слева на матрицу $\|S_3\|$ размера $m\times m$, которая получается из единичной матрицы $\|E\|$ порядка m путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в i-й строке и j-м столбце, на единицу. При этом результат суммирования строк i и j матрицы $\|A\|$ окажется i-й строкой результирующей матрицы $\|S_3\| \cdot \|A\|$.

Теорема 6.8.1 **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований также есть** *элементарное преобразование*, **матрица которого равна произведению матриц данных элементарных преобразований.**

Теорема 6.8.2 **Если умножение матрицы $\|A\|$ слева на квадратную матрицу $\|S\|$ реализует некоторое преобразование над строками $\|A\|$, то умножение $\|A\|$ справа на $\|S\|$ реализует то же самое преобразование матрицы $\|A\|$, но выполненное над ее столбцами.**